Г.М.Борбоева

Аналитикалык геометрия боюнча мисалдар жана маселелер жыйнагы

Борбоева Гулниса Маматкановна

Аналитикалык геометрия боюнча мисалдар жана маселелер жыйнагы

Ош-2016

УДК 514
ББК 22.151.5
М 33

Окуу колдонмо Ош мамлекеттик университетинин Окумуштуулар кеңешинин 2015-жылынын 30-июнунда болуп өткөн №6 жыйынынын чечими боюнча басмага сунушталган.

Рецензенттер:

- ОшМУнун алгебра жана геометрия кафедрасынын башчысы, физ.-мат. илим.доктору, профессор Матиева Гулбадан
- Ош мамлекеттик социалдык университетинин табигый илимдер жана педагогика факультетинин деканы, физ.-мат. илим.кандидаты, доцент Зулпукаров Алтынбек

Автор: Г.М.Борбоева

М 33. Аналитикалык геометрия боюнча мисалдар жана маселелер жыйнагы: Окуу колдонмо. – Ош: 2016. 232 бет. ISBN 978-9967-03-844-8

Окуу колдонмо жогорку окуу жайдын “математика”, “колдонмо математика жана информатика” жана “информатика” адистиктеринде окуган I, II курстардын студенттери үчүн даярдалган.

М 1602050000-12
ISBN 978-9967-03-844-8

УДК 514
ББК 22.151.5

Мазмуну

Кириш сөз

Аналитикалык геометрия – геометриялык фигураларды жана алардын касиеттерин координаталар методдорунун негизинде элементардык алгебранын каражаттары менен окуп үйрөтүүчү геометриянын бир бөлүмү болуп саналат. Бул метод ар бир геометриялык катышка фигуранын координаталарын байланыштыруучу кандайдыр бир теңдемени тиешелештикке коет.

Аналитикалык геометриянын методдору тегиздиктеги жана үч ченемдүү мейкиндиктеги фигураларга колдонулган сыяктуу эле жогорку ченемдүү мейкиндиктердеги фигуралар үчүн да колдонулат. Жыйнакка тегиздиктеги жана мейкиндиктеги аналитикалык геометрия курсунун материалдары боюнча мисал-маселелер камтылды.

Аналитикалык геометрия предметин окутуу менен келечек математик мугалиминде геометриялык билимди, маданиятты калыптандырууга жетишебиз. Аналитикалык геометрия боюнча орус тилинде көптөгөн маселелер жыйнактары бар, бирок кыргыз тилинде жыйнак жокко эсе болууда. Ошондуктан жыйнак кыргыз тилинде жазылды жана ага мектеп геометриясынын түшүнүктөрү менен байланышкан маселелер да камтылды.

Жыйнактын ар бир параграфынын башында мисал-маселелерди чыгара ала тургандай деңгээлде, параграфка тиешелүү теориялык материал кыскача аныктоолор, теоремалар, касиеттер жана формулалар менен берилди. Андан соң бир нече мисалдарды жана маселелерди чыгаруунун жолдору көрсөтүлдү. Жыйнактын акырында мисалдардан жана маселелердин жооптору көрсөтүлүп, кээ бирлерин чыгарууга көрсөтмө берилди, ал эми кээ бирлеринин чыгарылыштары толук сунушталды.

Бул колдонмо негизинен жыйнак-практикум болуп сунушталгандыктан, аны дистанттык окуудагы студенттер үчүн да колдонууга, ошондой эле жыйнакта мектеп геометриясынын түшүнүктөрү да камтылгандыктан, математиканы терең өздөштүрүүгө аракет кылган жогорку класстын окуучуларына да сунуштоого болот.

I. Матрицалар жана аныктагычтар

§1. Экинчи, үчүнчү тартиптеги матрицалар жана аныктагычтар

Аныктама 1.1. Эки жолчодон жана эки мамычадан турган, төрт элементтүү таблица экинчи тартиптеги **квадраттык матрица** деп аталат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Матрицанын a_{11} жана a_{12} элементтери анын биринчи жолчосунун, ал эми a_{21} жана a_{22} – экинчи жолчосунун; a_{11} жана a_{21} – биринчи мамычасынын, ал эми a_{12} жана a_{22} – экинчи мамычасынын элементтери болуп саналышат. Матрицадагы жолчолор менен мамычалардын саны матрицанын **тартиби** деп аталат.

Аныктама 1.2. Үч жолчодон жана үч мамычадан турган, тогуз элементтүү таблица **үчүнчү тартиптеги квадраттык матрица** деп аталат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

a_{11}, a_{22}, a_{33} элементтери матрицанын **оң (негизги, башкы) диагоналын**, a_{31}, a_{22}, a_{13} – **сол (жардамчы, кошумча) диагоналын** түзүшөт.

Аныктама 1.3. Экинчи тартиптеги матрицанын

$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ **аныктагычы** деп, бул матрицанын оң диагоналынын элементтеринин көбөйтүндүсүнөн сол диагоналынын элементтеринин көбөйтүндүсүн кемитүүдөн алынган сан аталат.

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (1.3)$$

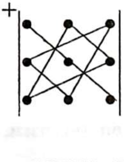
Аныктама 1.4. Үчүнчү тартиптеги матрицанын **аныктагычы** деп, төмөнкү формула менен аныкталган санды айтабыз:

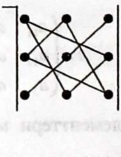
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1.4)$$

Бул барабардыктын оң жагы аныктагычтын биринчи жолчосунун элементтери боюнча **ажыралышы** болуп саналат.

Бул туюнтмадагы экинчи тартиптеги аныктагычтарды (1.3) эреже боюнча эсептөөдөн төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.5)$$





Аныктагычты мындайча эсептөө эрежеси Сарриустун эрежеси же үч бурчтук эрежеси деп аталат.

Аныктагычтын касиеттери:

1^0. Эгерде аныктагычтын кандайдыр бир жолчосунун (мамычасынын) элементтеринин баары нөл болсо, анда аныктагычтын мааниси нөлгө барабар болот.

2^0. Эгерде аныктагыч бирдей эки жолчону (мамычаны) кармаса, анда анын мааниси нөлгө барабар болот.

3^0. Аныктагычтын жолчосу менен мамычасын тиешелеш түрдө алмаштырууда аныктагычтын мааниси өзгөрбөйт.

4^0. Аныктагычтын эки жолчосунун (мамычасынын) ордун алмаштырууда аныктагычтын белгиси карама-каршысына өзгөрөт.

5^0. Эгерде аныктагычтын эки жолчосу (мамычасы) пропорционалдуу болсо, анда аныктагыч нөлгө барабар болот.

6^0. Аныктагычтын кандайдыр бир жолчосуна (мамычасына) башка бир жолчосун (мамычасын) нөлдөн айырмалуу болгон санга көбөйтүп, кошуудан анын мааниси өзгөрбөйт.

Мисал 1.1. Төмөндөгү экинчи тартиптеги матрицанын аныктагычын эсептегиле: $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Чыгаруу. (1.3) формула боюнча:

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 21 - 5 = 16 .$$

Мисал 1.2. Төмөндөгү үчүнчү тартиптеги матрицанын аныктагычын эсептегиле: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Чыгаруу. (1.4) жана (1.5) формулалар боюнча:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (3 \cdot 3 - 4 \cdot 2) - 1 \cdot (5 \cdot 3 - 1 \cdot 2) + 3 \cdot (5 \cdot 4 - 1 \cdot 3) = 40.$$

№ 1. Төмөндөгү аныктагычтарды эсептегиле:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; **6)** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 8 & 16 & -2 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$; **8)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; **9)** $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

№ 2. Аныктагычты эсептебей туруп, төмөнкү барабардыктардын тууралыгын аныктагыла:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 15 & 2 \\ 3 & 7 & -6 \\ 2 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 0$; **2)** $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -6 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$;

5) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1+\alpha a_2 & b_1+\alpha b_2 & c_1+\alpha c_2 \end{vmatrix} = 0;$ **6)** $\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos^2\beta & \sin^2\beta & \cos 2\beta \\ \cos^2\gamma & \sin^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$

№ 3. Төмөндөгү үчүнчү тартиптеги аныктагычтарды эсептегиле:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix};$ **2)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix};$ **3)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix};$

4) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -1 & 5 & 2 \\ 5 & -12 & 3 \end{vmatrix};$ **5)** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix};$ **6)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix};$

7) $\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix};$ **8)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & n & p \\ m^2 & n^2 & p^2 \end{vmatrix}.$

№ 4. Төмөндөгү теңдемелерди чыгаргыла:

1) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ **2)** $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 4 \\ x & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

№ 5. Төмөндөгү барабарсыздыктарды чыгаргыла:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & x \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} < 1;$ **2)** $\begin{vmatrix} 5 & -3 & x \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & x+2 & -1 \end{vmatrix} \le 0.$

№ 6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)$ экендигин көрсөткүлө.

II. Вектордук алгебранын негиздери

§2. Вектордук алгебранын негизги түшүнүктөрү

I. Вектор түшүнүгү

Тегиздикте A жана B чекиттери берилсин.

Аныктама 2.1. A чекитинен B чекитине карай кеткен багытталган кесинди **вектор** деп аталат (2.1- сүрөт).

A чекити вектордун **башталышы**, B – **акыры** деп аталат.

(2.1-сүрөт)

Векторду жазма кичине латын тамгасынын үстүнө жебе коюу менен же эки чоң басма латын тамгасынын үстүнө жебе коюу менен белгилейбиз: $\vec{a}$ же $\overline{AB}$.

Аныктама 2.2. Сандык мааниси жана багыты менен аныкталган чоңдуктар вектордук **чоңдуктар** деп аталат.

Аныктама 2.3. Сандык мааниси менен гана аныкталган чоңдуктар **скалярдык чоңдуктар** же **скалярлар** деп аталат.

Аныктама 2.4. Вектордун башталыш чекити менен акыркы чекитинин арасындагы аралык вектордун **узундугу** деп аталат жана $|\bar{a}|$ же $|\overrightarrow{AB}|$ деп белгиленет. («*a* векторунун модулу» же «*AB* векторунун модулу» деп окулат).

Эгерде вектордун башталышы менен акыры дал келсе, анда вектор **нөлдүк вектор** деп аталат жана $\bar{0}$ же $\overline{AA}$ деп белгиленет. Нөлдүк вектордун узундугу нөлгө барабар болот.

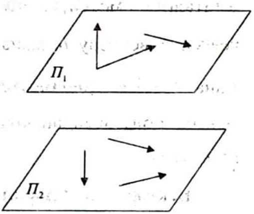
Аныктама 2.5. Узундугу бирге барабар болгон вектор **бирдик вектор** же **орт** деп аталат.

Аныктама 2.6. Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору бир түз сызыкта же параллель түз сызыктарда жатышса, анда алар **коллинеардуу** деп аталат жана $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ деп белгиленет (2.2-сүрөт).

2.2-сүрөт

Нөл вектор ар кандай векторго коллинеардуу деп эсептелинет.

Аныктама 2.7. Бир тегиздикте же параллель тегиздиктерде жатышкан векторлор **компланардуу** деп аталат (2.3-сүрөт).



2.3-сүрөт

Аныктама 2.8. Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору коллинеардуу болушуп, бирдей (карама-каршы) багытка ээ болушса, анда алар **бирдей (карама-каршы)** багытталган векторлор деп аталат жана $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ $\left(\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\right)$ деп белгиленет.

Аныктама 2.9. Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ коллинеардуу векторлору барабар узундукка жана бирдей багытка ээ болушса, анда алар **барабар** векторлор деп аталат, б.а. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, жана $\vec{a}=\vec{b}$ деп белгиленет.

Аныктама 2.10. $-\bar{a}$ вектору $\bar{a}$ векторуна **карама-каршы вектор** деп аталат.

II. Векторлордун үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар

Векторлордун үстүнөн кошуу, кемитүү, векторду санга көбөйтүү амалдары аткарылат.

Аныктама 2.8. Векторлорду кошуу, кемитүү жана векторду чыныгы санга көбөйтүү амалдары **сызыктуу амалдар** деп аталат.

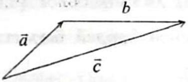
Векторлорду кошуу. $\bar{a}$ векторунун акыры $\bar{b}$ векторунун башталышы болгон учурда, башталышы $\bar{a}$ векторунун башталышы менен, ал эми акыры $\bar{b}$ векторунун акыры менен дал келген $\bar{c}$ вектору $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ векторлорунун **суммасы** деп аталат жана $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ деп белгилейбиз.

Векторлорду мындай кошуу **"үч бурчтук эрежеси"** деп аталат (2.4-сүрөт).

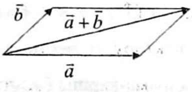
Векторлорду **"параллелограмм эрежеси"** боюнча кошууну көрсөтөлү:

$\bar{a}$ вектору $\bar{b}$ менен векторунун башталыштарын дал келтирип, бул векторлорго параллелограмм тургузалы. Параллелограммдын башталышы берилген векторлор-дун башталышы менен дал келген диагоналы берилген эки вектордун суммасы болуп саналат (2.5-сүрөт).

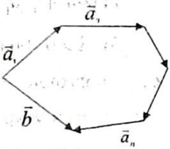
Бир нече сандагы векторлорду кошуу үчүн: биринчи вектордун акырына экинчи вектордун башталышын, экинчи вектордун акырына үчүнчү вектордун башталышын ж.у.с. дал келтиребиз. Натыйжада башталышы биринчи векторлун башталышы менен, акыры акыркы вектордун акыры менен дал келген вектор берилген векторлордун суммасы болот: $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$ (2.6-сүрөт).



2.4-сүрөт



2.5-сүрөт



2.6-сүрөт

Векторлорду кошуунун касиеттери:

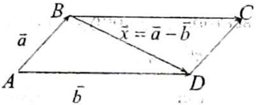
1^0. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (орун алмаштыруу);

2^0. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (топтоштуруу);

3^0. Каалаган $\vec{a}$ вектору үчүн: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;

4^0. Каалаган $\vec{a}$ вектору үчүн: $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

Векторлорду кемитүү. $\vec{b}$ векторуна кошкондо $\vec{a}$ векторун берүүчү $\vec{x}$ вектору $\vec{a}$ вектору менен $\vec{b}$ векторунун **айырмасы** деп аталат жана $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ деп белгиленет.



2.7-сүрөт

Бирдей башталышка ээ болгон $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлоруна параллелограмм тургузалы. Бул параллелограммдын башталышы берилген векторлордун башталышы менен дал келбеген диагоналы $\vec{x}$ векторун берет (2.7-сүрөт).

Векторду санга (скалярга) көбөйтүү. $\vec{a}$ векторунун $\lambda \neq 0$ санына болгон **көбөйтүндүсү** деп, төмөндөгү шарттарды канааттандыруучу $\lambda\vec{a}$ вектору аталат:

1) $\lambda\vec{a} \parallel \vec{a}$ ($\lambda\vec{a}$ вектору $\vec{a}$ векторуна коллинеардуу);

2) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ($\lambda\vec{a}$ вектору $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ узундугуна ээ);

3) $\lambda > 0$ болсо, $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$; $\lambda < 0$ болсо, $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ болот (б.а. $\lambda > 0$ болгондо $\lambda\vec{a}$ вектору $\vec{a}$ вектору менен бирдей багытта, $\lambda < 0$ болгон учурда карама-каршы багытта).

Векторду санга көбөйтүүнүн касиеттери:

1^0. Нөл эмес $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун коллинеардуу болушу үчүн λ саны табылып, $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү;

2^0. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (векторду санга көбөйтүүдө сандарды көбөйтүүгө карата топтоштурууга болот);

3^0. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (векторду санга көбөйтүүдө сандарды кошууга карата бөлүштүрүүгө болот);

4^0. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (векторду санга көбөйтүүдө векторлорду кошууга карата бөлүштүрүүгө болот);

5^0. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

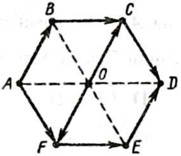
Векторду санга көбөйтүүнүн касиеттеринен векторду нөлгө көбөйтүүдө нөл вектор келип чыгат.

Мисал 2.1. $2\vec{a} + \vec{b} = 6 - 3\vec{b}$ теңдемесин $\vec{a}$ га карата чечкиле;

Чыгаруу. $\vec{b}$ ны теңдеменин оң жагына алып өтөбүз: $2\vec{a} = 6 - 4\vec{b}$. Бул барабардыктын эки жагын тең $\vec{a}$ векторунун коэффициенти 2ге бөлөбүз: $\vec{a}=3-2\vec{b}$.

Мисал 2.2. O – $ABCDEF$ туура алты бурчтугунун борбору болсо, анда $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}+\overline{OE}+\overline{OF}$ векторун тапкыла (2.8-сүрөт)..

Чыгаруу. Туура алты бурчтуктун диагоналдары O чекитинде кесилишет жана бул чекитте тең экиге бөлүнүшөт. Ошондуктан $\overline{OA}=-\overline{OD}$, $\overline{OB}=-\overline{OE}$ жана $\overline{OC}=-\overline{OF}$.



2.8 - сүрөт

Мындан $\overline{OA}+\overline{OD}=\vec{0}$, $\overline{OB}+\overline{OE}=\vec{0}$, $\overline{OC}+\overline{OF}=\vec{0}$ келип чыгат. Демек,

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}+\overline{OE}+\overline{OF}=\left(\overline{OA}+\overline{OD}\right)+\left(\overline{OB}+\overline{OE}\right)+\left(\overline{OC}+\overline{OF}\right)=\vec{0}.$$

Ушул сыяктуу эле $\overline{AD}+\overline{EB}+\overline{CF}=\vec{0}$ экендигин көрсөтүүгө болот.

№ 7. Төмөнкү сүйлөмдөрдүн кайсынысы туура?

1) $\vec{a}\,||\,\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; **2)** $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\,||\,\vec{b}$;

3) $\vec{a}\,||\,\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\neq\vec{b}$; **4)** $\vec{a}=\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\,||\,\vec{b}$.

№ 8. $\overline{OA}$ жана $\overline{OB}$ векторлору берилсе, төмөндөгү векторлорду тургузгула:

1) $\frac{1}{2}\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{OB}$; **2)** $\frac{1}{2}\overline{OA}-\frac{1}{2}\overline{OB}$;

3) $-\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{OB}$; **4)** $2\overline{OA}+\overline{OB}$.

№ 9. $ABCD$ – квадрат, ал эми E – BC жагынын орто чекити болсун.

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}$; **2)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$; **3)** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}$; **4)** $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$;

5) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ суммаларын тапкыла.

№ 10. $ABCD$ – параллелограмм, ал эми F жана H чекиттери BC жана AD жактарынын орто чекиттери, O – диагоналдарынын кесилиши болсун. Чиймеде төмөнкү векторлорду түзгүлө:

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; **2)** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$; **3)** $\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{BF}$;

4) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{FC}$; **5)** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$; **6)** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OB}$;

7) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{CD}$.

№ 11. $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлоруна тургузулган параллелограммдын жардамында төмөнкү теңдештиктердин тууралыгын чиймеде текшергиле:

1) $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}$; **2)** $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{b}$;

3) $(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}$.

№ 12. $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору кайсы шарттарды канааттандырганда, төмөнкү катыштар орун алат?

1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; **2)** $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$; **3)** $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$.

№ 13. $\vec{a}+\vec{b}$ вектору $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун арасындагы бурчту тең экиге бөлүшү үчүн $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору кайсы шартты канааттандырышы керек?

№ 14. O – ABC үч бурчтугунун оордук борбору (медианалардын кесилиш чекити) болсо, анда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ экендигин далилдегиле.

№ 15. $O-ABCD$ параллелограммынын оордук борбору (диагоналдарынын кесилиш чекити) болсо, анда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ экендигин далилдегиле.

№ 16. O чекитинен $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ жана $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ векторлору чыгат. $\angle AOB$ бурчунун биссектрисасынан чыгуучу кандайдыр бир $\overrightarrow{OM}$ векторун тапкыла.

№ 17. $O-ABCD$ параллелограммынын диагоналдарынын кесилиш чекити болсун. Төмөндөгү жуп векторлордун кайсылары барабар?

1) $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{DC}$;	**2)** $\overrightarrow{BC}$ жана $\overrightarrow{DA}$;
3) $\overrightarrow{AO}$ жана $\overrightarrow{OC}$;	**4)** $\overrightarrow{BO}$ жана $\overrightarrow{DO}$.

№ 18. O чекити $ABCDEF$ туура алты бурчтугунун борбору болсун (2.8-сүрөт). $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ деп эсептеп, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DA}$ векторлорун $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору аркылуу туюнткула.

№ 19. ABC үч буртугунда $\overrightarrow{AD}$ медианасы жүргүзүлгөн. $\overrightarrow{AD}$ векторун $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{AC}$ векторлору аркылуу туюнткула.

№ 20. ABC үч буртугунда $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ медианалары жүргүзүлгөн. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$ векторун тапкыла.

№ 21. E жана F чекиттери $ABCD$ төрт бурчтугунун AB жана CD жактарынын орто чекиттери болсо, анда $\overrightarrow{EF}=\dfrac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}}{2}$ экендигин далилдегиле. Трапециянын орто сызыгы тууралуу теореманы келтирип чыгаргыла.

№ 22. $\overline{AB}=\vec{p}$, $\overline{AD}=\vec{q}$ жана $\overline{AA'}=\vec{r}$ компланардуу эмес векторлоруна $ABCDA'B'C'D'$ параллелепипеди тургузулган. Параллелепипеддин кырлары, диагоналдары, грандарынын диагоналдары менен дал келген, башталышы A' чекити болгон векторлорду $\vec{p}$, $\vec{q}$ жана $\vec{r}$ векторлору аркылуу туюнткула.

№ 23. $OABC$ – тетраэдри берилген. $\overline{OA}=\vec{a}$, $\overline{OB}=\vec{b}$ жана $\overline{OC}=\vec{c}$ деп алып, $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ жана $\overline{RS}$ векторлорун $\vec{a}$, $\vec{b}$ жана $\vec{c}$ векторлору аркылуу туюнткула. Мында M,P жана R чекиттери тиешелеш түрдө OA,OB жана OC кырларынын, ал эми N,Q жана S чекиттери тиешелеш түрдө бул кырларга карама-каршы кырларынын орто чекиттери.

§3. Вектордук мейкиндик. Мейкиндиктин базиси

I. Вектордук мейкиндиктин аныктамасы

V – $x,y,z,...$ элементтеринен турган каалагандай бош эмес көптүк болсун.

Аныктама 3.1. Эгерде V көптүгүнүн элементтери үчүн төмөнкү үч талап аткарылса:

I. V көптүгүнүн каалагандай x,y элементтерине ошол эле көптүктөн алардын суммасы деп аталуучу үчүнчү элемент туура келсе;

II. V көптүгүнүн каалаган x элементинин каалагандай λ чыныгы санына болгон көбөйтүндүсү да ушул эле көптүктөн табылса;

III. Жогорудагы эки эреже төмөнкү 8 аксиоманы канааттандырса:

1^0. $x+y=y+x$ (кошуунун орун алмаштыруу касиети);

2^0. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (кошуунун топтоштуруу касиети);

3^0. Ар бир x элементи үчүн $x+0=0+x=x$ шарты орун ала тургандай 0 элементи V дан табылса;

4^0. Ар бир x элементи үчүн $x+(-x)=-x+x=0$ шарты орун ала тургандай $-x$ карама-каршы элемент V дан табылса;

5^0. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$, $\lambda, \mu\in R$;

6^0. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$, $\lambda, \mu\in R$;

7^0. $\mu(x+y)=\mu x+\mu y$, $\mu\in R$;

8^0. $1\cdot x=x$,

анда V көптүгү чыныгы сандардын үстүндө аныкталган **вектордук мейкиндик** деп аталат.

Мисал 3.1. B_3 – кадимки векторлордун көптүгү болсун. Каалагандай эки вектордун суммасы вектор болот; векторду чыныгы санга көбөйткөндө векторго ээ болобуз жана бул эки амал вектордук мейкиндиктин аныктоосундагы 8 аксиоманы канааттандырат. Ошондуктан кадимки векторлордун B_3 көптүгү чыныгы сандардын үстүндө аныкталган вектордук мейкиндик болот.

II. Вектордук мейкиндиктин базиси

V – вектордук мейкиндик жана $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V$ болсун.

Аныктама 3.1. Эгерде каалаган $\bar{b} \in V$ вектору үчүн $\bar{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$ барабардыгы орун алса, анда ал $\vec{b}$ векторунун $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлору аркылуу **сызыктуу ажыралышы** деп аталат, мында $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – чыныгы сандар.

Аныктама 3.2. Эгерде $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ чыныгы сандарынын жок дегенде бири нөлдөн айырмалуу болгон учурда

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \tag{3.1}$$

барабардыгы орун алса, анда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлорунун системасы **сызыктуу көз каранды система** деп аталат.

Аныктама 3.3. Эгерде (3.1) барабардыгы $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ чыныгы сандарынын бардыгы нөлгө барабар, б.а. $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ болгондо гана орун алса, анда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлордун системасы сызыктуу **көз каранды эмес система** деп аталат.

Теорема 3.1. Векторлор системасынын сызыктуу көз каранды болушу үчүн бул системадагы каалаган вектордун калган векторлор аркылуу сызыктуу туюнтулушу зарыл жана жетиштүү.

Теорема 3.2. Тегиздикте эки вектордун сызыктуу көз каранды болушу үчүн алардын коллинеардуу болушу зарыл жана жетиштүү.

Теорема 3.3. Мейкиндикте үч вектордун сызыктуу көз каранды болушу үчүн алардын компланардуу болушу зарыл жана жетиштүү.

Аныктама 3.4. Эгерде V мейкиндигинин $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ векторлор системасы сызыктуу көз каранды эмес болуп жана мейкиндиктин каалаган $\vec{x}$ вектору бул системанын векторлору аркылуу сызыктуу туюнтулса, анда $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ векторлор системасы V мейкиндигинин **базиси** деп аталат.

Аныктама 3.5. Мейкиндиктин базисин түзгөн векторлордун саны мейкиндиктин **ченемдүүлүгү** деп аталат жана $\dim V = n$, же V_n, же V^n деп белгиленет.

Мындан ары n-ченемдүү V_n мейкиндигинин базисин $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}\}$ аркылуу белгилейли.

Теорема 3.4. Ар кандай векторду базистик векторлор аркылуу туюнтууга болот, бирок бир гана түрдүү:

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+...+x_n\vec{e}_n. \tag{3.2}$$

Мындагы $x_1,x_2,...,x_n$ коэффициенттери $\vec{x}$ векторунун $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}\}$ базисиндеги **координаталары** деп аталышат.

Аныктама 3.6. Эгерде $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}\}$ базисиндеги базистик векторлордун узундуктары бирге барабар болуп жана алар өз ара перпендикуляр болушса, анда базис **ортонормаланган базис** деп аталат.

Үч ченемдүү мейкиндиктеги ортонормаланган базисти $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ деп белгилейбиз жана $\vec{i}(1,0,0)$, $\vec{j}(0,1,0)$, $\vec{k}(0,0,1)$ болот.

$\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}\}$ базисине карата $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ жана

$\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ векторлору берилсин. Анда

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n), \tag{3.3}$$

б.а. эки вектордун суммасы тиешелеш координаталарынын суммасына барабар болот.

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n),\ \lambda\in R, \tag{3.4}$$

б.а. векторду санга көбөйтүүдө анын ар бир координатасы бул санга көбөйтүлөт.

Мисал 3.1. $\vec{a}=\left(\frac{1}{4},1\right)$ жана $\vec{b}=(1,2)$ векторлору сызыктуу көз каранды болушабы?

Чыгаруу. Векторлор сызыктуу көз каранды болушу үчүн, Теорема 3.1 боюнча, алардын бири экинчиси аркылуу сызыктуу туюнтулушу керек:

$$\vec{a}=\alpha\vec{b}\Rightarrow\left(\frac{1}{4},1\right)=\alpha(1,2)\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}=\alpha,\\ 1=2\alpha.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{4},\\ \alpha=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Мында α бир маанилүү табылган жок. Демек, $\vec{a},\vec{b}$ – сызыктуу көз каранды эмес векторлор.

Мисал 3.2. $\vec{c}=(7,8)$ векторунун $\vec{a}=\left(\frac{1}{4},1\right)$ жана $\vec{b}=(1,2)$ векторлору аркылуу ажыралышын жазгыла.

Чыгаруу. $\vec{c}$ векторунун $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору аркылуу туюнтулушундагы координаталары (c_1,c_2) болсун. Анда $\vec{c}$ векторунун $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору аркылуу туюнтулушун жазууга болот: $\vec{c} = c_1\vec{a} + c_2\vec{b}$. Бул туюнтулушту векторлордун координаталарынын жардамында жазсак, төмөндөгү системага ээ болобуз:

$$\begin{cases} 7 = \frac{1}{4}c_1 + 1 \cdot c_2, \\ 8 = 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2. \end{cases}$$

Бул системаны чечсек, $c_1 = 4; c_2 = 6$ болот жана $\vec{c} = 4\vec{a} + 6\vec{b}$ ажыралышына ээ болобуз.

Мисал 3.3. $ABCD$– тетраэдринде K жана L чекиттери AC жана BD кырларынын орто чекиттери, ал эми $O - ACD$ гранынын медианаларынын кесилиши болсун (3.1-сүрөт).

1) $\overline{BO}$ векторунун $\{\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD}\}$ базисиндеги;

2) $\overline{KL}$ векторунун $\{\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AD}\}$ базисиндеги координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. **1)** $\overline{BO} + \overline{OA} = \overline{BA}$, $\overline{BO} + \overline{OC} = \overline{BC}$ жана $\overline{BO} + \overline{OD} = \overline{BD}$ барабардыктарын кошолу:

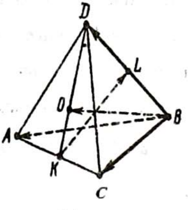
$3\overline{BO} + (\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OD}) = \overline{BA} + \overline{BC} + \overline{BD}$.

§2деги № 14 мисалдын негизинде

$\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OD} = \bar{0}$. Анда

$\overline{BO} = \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC} + \frac{1}{3}\overline{BD}$ келип чыгат.

Демек, $\overline{BO} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ болот.



3.1- сүрөт

2) $\overline{AL}$ вектору ADB үч бурчтугунун медиана вектору болгондуктан, $\overline{AL} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{AB})$ келип чыгат. Мындан

$\overline{KL} = \overline{AL} - \overline{AK} = \frac{1}{2}\left(\overline{AD} + \overline{AB}\right) - \frac{1}{2}\overline{AC} = -\frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$ га ээ болобуз. Демек, $\overline{KL} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ болот.

№ 24. $\vec{a} = (2,4)$, $\vec{b} = (-3,1)$, $\vec{c} = (5,-2)$ векторлору берилген.

1) $2\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{c}$; **2)** $\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c}$ векторун тапкыла.

№ 25. $\vec{c}$ векторун $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору аркылуу туюнткула:

1) $\vec{a} = (4,-2)$, $\vec{b} = (3,5)$, $\vec{c} = (1,-7)$;

2) $\vec{a} = (5, 4)$, $\vec{b} = (-3,0)$, $\vec{c} = (19, 8)$;

3) $\vec{a} = (-6, 2)$, $\vec{b} = (4, 7)$, $\vec{c} = (9,-3)$.

№ 26. $\vec{a} = (6,-8)$ вектору берилген. $\vec{a}$ векторуна коллинеардуу болуп, ал менен бирдей багыттагы жана карама-каршы багыттагы бирдик векторлордун координаталарын тапкыла.

№ 27. Эгерде $\vec{a} = (-12,16)$, $\vec{b} = (12,5)$ векторлору жалпы башталышка ээ болсо, анда $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун арасындагы бурчту тең экиге бөлүүчү, башталышы бул вектордун башталышы менен дал келген бирдик вектордун координаталарын тапкыла.

№ 28. $\vec{a} = (-5,2)$ вектору менен жалпы башталышка ээ болгон жана ага перпендикуляр болуп, узундугу $\vec{a}$ векторунун узундугуна барабар болгон $\vec{b}$ векторунун координаталарын тапкыла.

№ 29. $\vec{a} = (2,-3)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ векторлору берилген. t нын кандай маанилеринде төмөнкү векторлор системасы коллинеардуу болот:

1) $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ жана $\vec{g}=\vec{a}-t\vec{b}$; **2)** $\vec{p}=t\vec{a}+\vec{b}$ жана $\vec{g}=\vec{a}+t\vec{b}$;

3) $\vec{p}=t\vec{a}+\vec{b}$ жана $\vec{g}=\vec{a}$?

№ 30. $\overline{AB}=(1,3)$ жана $\overline{AC}=(2,1)$ векторлоруна үч бурчтук тургузулган. Үч бурчтуктун $\overline{AK_1}$, $\overline{BK_2}$, $\overline{CK_3}$ медианаларынын координаталарын тапкыла.

№ 31. $\vec{a}=(1,-2)$, $\vec{b}=(-1,0)$, $\vec{c}=\left(-\frac{3}{2},3\right)$ жана $\vec{d}\left(-\frac{3}{2},1\right)$ векторлору берилген. $AB=\left|\vec{a}\right|$, $BC=\left|\vec{b}\right|$, $CD=\left|\vec{c}\right|$, $AD=\left|\vec{d}\right|$ болуп, $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ векторлоруна параллель болгон $ABCD$ трапециясы жашайбы?

№ 32. $ABCDEF$ туура алты бурчтугунда $\overline{AD}=\vec{e}_1$, $\overline{AE}=\vec{e}_2$ болсо, анда $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$ жана $\overline{AC}$ векторлорунун $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ базисиндеги координаталарын тапкыла.

№ 33. 1) $\vec{a}=(5,2,1)$, $\vec{b}=(-1,4,2)$, $\vec{c}=(-1,-1,6)$;

2) $\vec{a}=(6,\ 4,2)$, $\vec{b}=(-9,\ 6,\ 3)$, $\vec{c}=(-3,\ 6,\ 3)$;

3) $\vec{a}=(6,-18,12)$, $\vec{b}=(-8,24,-16)$, $\vec{c}=(8,7,3)$.

$\vec{a}, \vec{b}$ жана $\vec{c}$ векторлору сызыктуу көз карандыбы? Эгерде көз каранды болсо, $\vec{c}$ векторун $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору аркылуу туюнткула.

№ 34. Каалаган $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлору жана λ,μ,ν чыныгы сандары үчүн $\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{b}$, $\nu\vec{b}-\lambda\vec{c}$, $\mu\vec{c}-\nu\vec{a}$ векторлорунун коллинеардуу болушун көрсөткүлө.

№ 35. $\vec{a}(1,5,3)$, $\vec{b}(6,-4,-2)$, $\vec{c}(0,-5,7)$ жана $\vec{d}\,(-20, 27, -35)$ векторлору берилген. α, β, γ сандарынын кандай маанилеринде ар биринин акыры кийинкисинин башталышына дал келе тургандай сынык сызыкты $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}$ жана $\vec{d}$ векторлорунун жардамында түзүүгө болот?

§4. Векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү

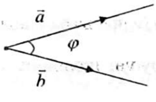
I. Вектордун октогу проекциясы

Аныктама 4.1. Жалпы башталышка ээ болгон эки вектордун шоолаларынын арасындагы тегиздиктин бөлүгү бул векторлордун арасындагы **бурч** деп аталат (4.1-сүрөт).

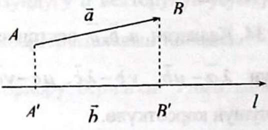
Эки вектордун арасындагы бурчту $\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)$ деп же кичинекей грек тамгасы менен белгилейбиз (мисалы, φ).

Мектеп курсунан **ок** деген багытталган түз сызык экендиги белгилүү. Чекиттин октогу проекциясын алуу үчүн, бул чекиттен окко перпендикуляр түшүрүү керек.

Аныктама 4.2. Башталышы $\vec{a}$ векторунун башталышынын октогу проекциясы, акыры $\vec{a}$ векторунун акырынын октогу проекциясы болгон $\vec{b}$ вектору $\vec{a}$ векторунун l огундагы **проекциясы** деп аталат (4.2-сүрөт).



4.1-сүрөт



4.2-сүрөт

$\bar{a}$ векторунун $\bar{b}$ векторуна болгон проекциясы $pr_{\bar{b}}\bar{a}$ деп белгиленет, $\overline{A'B'} = pr_{\bar{b}}\bar{a}$.

Проекциянын касиеттери:

1) $|pr_{\bar{b}}\bar{a}| = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$, мында $\varphi = (\bar{a}, \hat{\ } \bar{b})$;

2) $pr_{\bar{c}}(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}) = \lambda\, pr_{\bar{c}}\bar{a} + \mu\, pr_{\bar{c}}\bar{b}$, мында λ; μ – каалаган сандар;

3) барабар векторлор барабар проекцияларга ээ.

II. Скалярдык көбөйтүндү

Аныктама 4.3. $\vec{a} \neq \bar{0}$ жана $\vec{b} \neq \bar{0}$ векторлорунун узундуктарын алардын арасындагы бурчтун косинусуна көбөйткөндөн алынган сан $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун **скалярдык көбөйтүндүсү** деп аталат, б.а.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a} \hat{,} \vec{b}\right). \tag{4.1}$$

Скалярдык көбөйтүүнүн касиеттери:

1^o. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (орун алмаштыруу);

2^o. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (бөлүштүрүү);

3^o. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;

4^o. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2}$ (вектордун скалярдык квадраты);

5^o. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\lambda \in R$.

Эгерде $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ортонормаланган базисине карата $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ болсо, анда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{4.2}$$

болот.

Вектордун узундугу:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}. \tag{4.3}$$

Эки вектордун арасындагы бурчтун косинусу:

$$\cos\left(\vec{a}\,\widehat{\,}\,\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}}}. \tag{4.4}$$

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ векторунун $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ базисиндеги багыттоочу косинустары:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}};\ \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}};\ \cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \tag{4.5}$$

мында $\alpha = \left(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{i}\right)$, $\beta = \left(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{j}\right)$, $\gamma = \left(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{k}\right)$.

Эки вектордун координаталык көрүнүштөгү перпендикулярдуулук шарты төмөндөгүдөй болот:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \tag{4.6}$$

$\vec{a}$ векторунун бирдиги (орту):

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}, \tag{4.7}$$

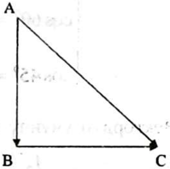
мында $\overline{a_0}$ вектору бирдик вектор.

$\vec{a}$ векторунун $\vec{b}$ векторуна болгон проекциясы:

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} \tag{4.8}$$

Мисал 4.1. Тик бурчтуу үч бурчтук үчүн Пифагордун теоремасын далилдегиле.

Далилдөө. ABC тик бурчтуу үч бурчтугу $\overline{AB}$ жана $\overline{BC}$ векторлоруна тургузулсун (4.3-сүрөт).



4.3-сүрөт

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

$$\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)^2=\overline{AC}^2,$$

$$\overline{AB}^2+2\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{BC}^2=\left|\overline{AB}\right|^2+2\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|cosB+$$

$$+\left|\overline{BC}\right|^2=\left|\overline{AB}\right|^2+\left|\overline{BC}\right|^2.$$

Мында $\overline{AB}\perp\overline{BC}$ болгондуктан, $cosB=0$.

Демек, $AB^2+BC^2=AC^2$. Теорема далилденди.

Мисал 4.2. $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$ жана $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ векторлорунун арасындагы бурчту тапкыла.

Чыгаруу. (4.5) формуланын негизинде төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\frac{4\cdot2-2\cdot3+6\cdot1}{\sqrt{4^2+(-2)^2+6^2}\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{2}{7}.$$

Демек, $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\arccos\frac{2}{7}$.

Мисал 4.3. Эгерде узундугу 4 болгон $\vec{a}$ вектору $\vec{i}$ жана $\vec{j}$ базистик векторлору менен тиешелүү түрдө 60^0 жана 45^0тук бурчту түзсө, анда $\vec{a}$ векторунун координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. $\vec{a}$ векторунун $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ базисиндеги координаталары (a_1,a_2,a_3) болсун. $\vec{i}(1,0,0)$, $\vec{j}(0,1,0)$ экендиги белгилүү. Анда (4.5) боюнча

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}\right)=\frac{a_1}{4},\ \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j}\right)=\frac{a_2}{4}$$ болот.

$\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}\right)=60^0,\ \left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j}\right)=45^0$ болгондуктан

$$\begin{cases}\cos 60^0=\dfrac{a_1}{4}, \\ \cos 45^0=\dfrac{a_2}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=2, \\ a_2=2\sqrt{2}.\end{cases}$$

Вектордун үчүнчү координатасын табуу үчүн (4.3)тү пайдаланабыз: $4=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2+a_3{}^2}\Rightarrow a_3=\pm 2.$

Ошентип, $\vec{a}=\left(2,2\sqrt{2},2\right)$ же $\vec{a}=\left(2,2\sqrt{2},-2\right)$.

Мисал 4.4. $\vec{a}=(2,-1,4)$ векторунун $\vec{b}=(-5,3,1)$ векторундагы проекциясын тапкыла.

Чыгаруу. (4.8) формуласына (4.2) жана (4.3) форулаларын пайдаланабыз:

$$pr_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{-9}{\sqrt{35}}=-\frac{9\sqrt{35}}{35}.$$

№ 36. Эгерде

1) $\left|\vec{a}\right|=8,\ \left|\vec{b}\right|=5,\ \left(\vec{a}\,\hat{.}\,\vec{b}\right)=60^\circ$; **2)** $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1,\ \left(\vec{a}\,\hat{.}\,\vec{b}\right)=135^\circ$;

3) $\vec{a}\perp\vec{b}$; **4)** $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=6,\ \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$;

5) $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=1,\ \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$,

болсо, анда $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

№ 37. $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору өз ара перпендикулярдуу, ал эми $\vec{c}$ вектору алар менен 60°тук бурчту түзөт. Эгерде $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5,\ |\vec{c}|=8$ болсо, анда төмөндөгүлөрдү тапкыла:

1) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$; **2)** $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$; **3)** $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$.

№ 38. $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2\right)$ теңдештигин далилдегиле жана геометриялык маанисин аныктагыла.

№ 39. $\vec{a},\vec{b}$ жана $\vec{c}$ бирдик векторлору үчүн $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ болсо, анда $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$ эмнеге барабар болот?

№ 40. $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5$ болсо, анда α нын кандай маанисинде $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ жана $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ векторлору өз ара перпендикуляр болушат?

№ 41. $\vec{a}=(3,4)$ векторунун бирдигин тапкыла.

№ 42. $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k}$ жана $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

№ 43. $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ жана $\vec{b}=6\vec{i}+4i-2\vec{k}$ векторлорунун арасындагы бурчту тапкыла.

№ 44. $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ жана $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$ векторлору берилген, мында $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1,\ (\vec{m},\wedge\vec{n})=120^0$. $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун арасындагы бурчту тапкыла.

№ 45. Тегиздикте $\vec{a},\vec{b}$ жана $\vec{c}$ векторлору берилген. $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ |\vec{c}|=3$ жана $(\vec{a},\wedge\vec{b})=60^{\circ}$, $(\vec{b},\wedge\vec{c})=60^{\circ}$ болсо, анда $\vec{u}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ векторунун модулун тапкыла.

№ 46. $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$ векторлоруна тургузулган параллелограммдын диоганалдарынын арасындагы бурчту тапкыла.

№ 47. mдин кандай маанисинде $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ жана $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-m\vec{k}$ векторлору өз ара перпендикуляр болушат?

№ 48. $\vec{a}=(7,-4)$ векторунун $\vec{b}=(-8,6)$ векторуна параллель болгон октогу проекциясынын чондугун тапкыла.

№ 49. $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ жана $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$ векторлору берилген. $np_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ ны тапкыла.

№ 50. $\vec{a}=(3,1,2)$, $\vec{b}=(2,7,4)$ жана $\vec{c}=(1,2,1)$ векторлору берилген.

1) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$, **2)** $\vec{a}^2\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ **3)** $\vec{a}^2\vec{b}+\vec{b}^2\vec{c}+\vec{c}^2\vec{a}$

көбөйтүндүлөрүн тапкыла.

№ 51. $\vec{a}=(11,10,2)$ жана $\vec{b}=(4,0,3)$ векторлору берилген. Узундугу бирге барабар болуп, $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлоруна перпендикуляр болгон $\vec{c}$ векторун тапкыла.

§5. Векторлордун вектордук жана аралаш көбөйтүндүлөрү

I. Багыт

Аныктама 5.1. Эгерде $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ векторлорунун берилүү тартиби көрсөтүлсө, б.а кайсынысы биринчи, кайсынысы экинчи, кайсынысы үчүнчү экендиги көрсөтүлсө, анда бул векторлор **иреттелген векторлордун үчтүгү** деп аталат.

Аныктама 5.2. Эгерде $\overline{e_1}$ векторунан $\overline{e_2}$ векторуна, $\overline{e_2}$ векторунан $\overline{e_3}$ векторуна кеткен багыт саат жебесинин багытына карама-каршы (багыты менен бирдей) болсо, анда $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ иреттелген үчтүгү **оң (сол) ориентациядагы үчтүк** деп аталат.

Аныктама 5.3. Мейкиндиктин $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ жана $\{\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}\}$ базистери берилсин.

$$\begin{cases} \overline{e_1'} = a_{11}\overline{e_1} + a_{12}\overline{e_2} + a_{13}\overline{e_3}, \\ \overline{e_2'} = a_{21}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + a_{23}\overline{e_3}, \\ \overline{e_3'} = a_{31}\overline{e_1} + a_{32}\overline{e_2} + a_{33}\overline{e_3} \end{cases} \tag{5.1}$$

барабардыктарындагы a_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ коэффициенттеринен түзүлгөн

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

матрицасынын аныктагычы оң (терс) болсо, анда $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ жана $\{\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}\}$ базистери **бирдей (карама-каршы) ориентацияланган** деп аталат жана $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\} \uparrow\uparrow \{\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}\}$ $\left(\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\} \uparrow\downarrow \{\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}\}\right)$ деп белгиленет.

II. Вектордук көбөйтүндү

$\overline{a} \neq \overline{o}$, $\overline{b} \neq \overline{o}$ жана $\overline{a}$ менен $\overline{b}$ векторлору коллинеардуу эмес болсун.

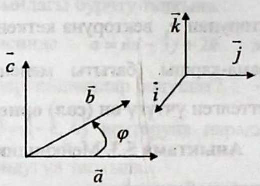
Аныктама 5.2. $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлорунун **вектордук**

көбөйтүндүсү деп, төмөндөгү шарттарды канааттандыруучу $\vec{c}$ вектору аталат:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right),\ 0<\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)<\pi;$

2) $\vec{a}\perp\vec{c},\ \vec{b}\perp\vec{c};$

3) $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}\uparrow\uparrow\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}.$



5.1-сүрөт

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун вектордук көбөйтүндүсү $[\vec{a},\vec{b}]$ деп белгиленет. Демек, $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ (5.1-сүрөт).

Касиеттери:

1°. $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ (антикоммутативдүүлүк);

2°. $[\overline{a_1}+\overline{a_2},\vec{b}]=[\overline{a_1},\vec{b}]+[\overline{a_2},\vec{b}]$ (векторлорду кошууга карата бөлүштүрүү);

3°. $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$, $\lambda\in R$ (сандык көбөйтүүчүгө карата топтоштуруу);

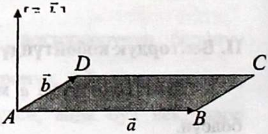
4°. $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b};$

5°. $[\vec{i},\vec{j}]=\vec{k}$, $[\vec{j},\vec{k}]=\vec{i}$, $[\vec{k},\vec{i}]=\vec{j}$, $[\vec{j},\vec{i}]=-\vec{k}$, $[\vec{k},\vec{j}]=-\vec{i}$, $[\vec{i},\vec{k}]=-\vec{j}$.

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлоруна тургузулган параллелограммдын аянты

$$S_{п-грамм}=\left|\,[\vec{a},\vec{b}\,]\,\right| \qquad (5.3)$$

форуласы менен аныкталат (5.2-сүрөт).



5.2 - сүрөт

Эгерде $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ ортонормаланган базисинде $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ болсо, анда бул векторлордун вектордук көбөйтүндүсүн

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{5.4}$$

же

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right\} \tag{5.4*}$$

формуласы менен табабыз.

Мисал 5.1. $\vec{a}=(2,4,1)$, $\vec{b}=(3,-1,5)$ болсо, $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ векторунун координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. Векторлордун вектордук көбөйтүндүсүн координаталарынын жардамында табуу формуласы, б.а. (5.4) боюнча:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(4\cdot5-(-1)\cdot1)-$$

$-\vec{j}\cdot(2\cdot5-3\cdot1)+\vec{k}\cdot(2\cdot(-1)-3\cdot4)=21\vec{i}-7\vec{j}-14\vec{k}$ ээ болобуз.

Демек, $\vec{c}=(21,-7,-14)$.

Мисал 5.2. $\overline{AB}(2,-2,-3)$, $\overline{AC}(4,0,6)$ векторлоруна тургузулган ABC үч бурчтугунун аянтын тапкыла.

Чыгаруу. ABC үч бурчтугунун аянты $ABCD$ параллелограммынын аянтынын жарымына барабар болгондуктан

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|$ болот. Анда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 0 & 6\\ 2 & -2 & -3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|12\bar{i}-12\bar{j}+8\bar{k}-12\bar{j}\right|=\frac{1}{2}\left|12\bar{i}-24\bar{j}+8\bar{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+(-24)^2+8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{784}=14.$$

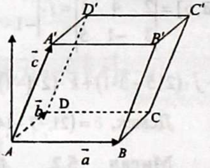
III. Аралаш көбөйтүндү

$\bar{a}\neq\bar{o},\ \bar{b}\neq\bar{o},\ \bar{c}\neq\bar{0}$ жана $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлору компланардуу эмес болсун.

Аныктама 5.3. $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ векторлорунун вектордук көбөйтүндүсүнө $\bar{c}$ векторун скалярдык көбөйтүүдөн алынган сан $\bar{a}$, $\bar{b}$ жана $\bar{c}$ векторлорунун **аралаш көбөйтүндүсү** деп аталат.

Аралаш көбөйтүндүнү $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$ деп белгиленет. Анда $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]\cdot\bar{c}=\left(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\right)$.

Касиеттери:



5.3 - сүрөт

1°. $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]\bar{c}=\bar{a}\left[\bar{b},\ \bar{c}\right]$;

2°. $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{b},\ \bar{c},\bar{a}\right)=\left(\bar{c},\bar{a},\bar{b}\right)$;

3°. $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=-\left(\bar{b},\ \bar{a},\bar{c}\right)=-\left(\bar{a},\bar{c},\bar{b}\right)=-\left(\bar{c},\bar{b},\bar{a}\right)$

4°. $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=o\Leftrightarrow\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – компланардуу;

$\bar{a}$, $\bar{b}$ жана $\bar{c}$ векторлоруна тургузулган параллелопипеддин көлөмү

$$V_{\text{п-пипед}} = \left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right| \qquad (5.5)$$

форуласы менен табылат (5.3-сүрөт).

Эгерде $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ортонормаланган базисинде $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ болсо, анда бул үч вектордун аралаш көбөйтүндүсү

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (5.6)$$

формуласы менен табылат.

Мисал 5.3. $\vec{a} = (1, -2, 0)$, $\vec{b} = (4, 3, -2)$ жана $\vec{c} = (0, -1, 3)$ векторлору компланардуубу? Компланардуу болушса, бул үчтүктүн багытын аныктагыла.

Чыгаруу. Үч вектордун аралаш көбөйтүндүсүнүн 4° касиети боюнча

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 + 24 = 31 \neq 0 \text{ гө ээ болобуз.}$$

Мындан берилген векторлордун компланардуу эмес экендиги келип чыгат. $31 > 0$ болгондуктан, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлору оң үчтүктү түзүшөт.

Мисал 5.4. $\overline{AB}(5, -3, -9)$, $\overline{AC}(-2, -7, -3)$, $\overline{AD}(-1, -3, -6)$ векторлоруна тургузулган тетраэдрдин көлөмүн тапкыла.

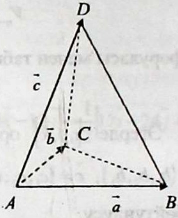
Чыгаруу. *ABCD* тетраэдринин көлөмүн табуу үчүн (5.5) формуласын пайдаланабыз (5.4-сүрөт).

$$V_{m-эдр}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec a,\ \vec b,\ \vec c\right)\right| \text{ болгондуктан,}$$

$$V_{m-эдр}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}5 & -3 & -9\\ -2 & -7 & -3\\ -1 & -3 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\left|210-9-54+63-45+36\right|=33{,}5.$$



5.4 - сүрөт

№ 52. 1) $\left[\left(\vec a+\vec b\right),\ \left(\vec a-\vec b\right)\right]$; **2)** $\left[\vec a,\ \left(\vec a+\vec b\right)\right]$; **3)** $\left[\dfrac{\vec a+\vec b}{2},\ \vec b-\dfrac{\vec a}{2}\right]$

векторлорун тапкыла.

№ 53. $\vec a=(1,-1,2)$, $\vec b=(0,3,1)$, $\vec c=(4,-2;1)$ жана $\vec d=(1,0,-1)$ векторлору берилген. Төмөнкү векторлорду тапкыла:

1) $\left[\vec a,\vec b\right]$; **2)** $\left[\vec a+\vec c,\vec d\right]$; **3)** $\left[\vec a-\vec b,\vec c+\vec d\right]$;

4) $\left[\vec a+\vec c+\vec d,\vec b-\vec c\right]$; **5)** $\left[\vec a-2\vec b+\vec c,3\vec b-\vec c+2\vec d\right]$.

№ 54. $\vec a=(2,-2,1)$, $\vec b=(2,3,6)$ векторлорунун арасындагы бурчтун синусун тапкыла.

№ 55. $\vec a=(3,4,1)$ жана $\vec b=(\alpha,2,\beta)$ векторлору α менен β нын кандай маанилеринде коллинеардуу болушат?

№ 56. $\left[\vec a,\vec b\right]^2+\left(\vec a\,\vec b\right)^2=\vec a^{\,2}\vec b^{\,2}$ экендигин далилдегиле.

№ 57. Эгерде $\vec a,\ \vec b,\ \vec c$ векторлору коллинеардуу болушпаса, анда

$[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{b},\vec{c}]=[\vec{c},\vec{a}]\Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ экендигин көрсөткүлө.

№ 58. Кандай шарттарда $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]=[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$ болот?

№ 59. $\vec{a}=(8,4,1)$ $\vec{b}=(2,-2,1)$ векторлоруна тургузулган параллелограммдын аянтын тапкыла.

№ 60. Эгерде $\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)=45^0$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$ болсо, анда $\vec{a}-2\vec{b}$ жана $3\vec{a}+2\vec{b}$ векторлоруна тургузулган параллелограммдын аянтын тапкыла.

№ 61.

1) $\overline{AB}(-6,-3,2)$, $\overline{AC}(-3,2,-6)$; **2)** $\overline{AB}(-7,-7,4)$, $\overline{AC}(-4,3,1)$;

3) $\overline{AB}(1,5,-3)$, $\overline{AC}(-2,6,-2)$; **4)** $\overline{AB}(6,-4,1)$, $\overline{AC}(-5,-1,-4)$

векторлоруна тургузулган үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

№ 62. *ABCD* параллелограммы берилген. *M*, *L* – *AB* жана *BC* жактарынын орто чекиттери. Эгерде $\overline{AB}=(6,-2,2)$, $\overline{AD}=(0,2,1)$ болсо, анда *DML* үч бурчтугунун аянтын тапкыла.

№ 63. *L, N, P, Q* чекиттери *ABCD* параллелограммынын жактарынын орто чекиттери болсун. Вектордук көбөйтүндүнү пайдаланып, *MNPQ* параллелограммынын аянты *ABCD* параллелограммынын аянтынан 2 эсе кичине экендигин көрсөткүлө.

№ 64. Эгерде $\vec{a}=(3,4,-1)$, $\vec{b}=(2,3,5)$ жана $\vec{c}=(1,0,1)$ болсо, анда

1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$; **2)** $(\vec{a}+\vec{b},\vec{b},\vec{c})$; **3)** $(2\vec{a}-3\vec{b},\vec{a},\vec{c})$ тапкыла.

№ 65. **1)** $\vec{a}=(1,3,-5)$, $\vec{b}=(3,-1,2)$ жана $\vec{c}=(2,1,-1)$;

2) $\vec{a}=(3,-1,4)$, $\vec{b}=(2,1,-1)$ жана $\vec{c}=(1,-2,5)$ векторлору компланардуубу?

№ 66. t нын кандай маанисинде $\bar{a}=(3,2,-1)$, $\bar{b}=(4,5,1)$ жана $\bar{c}=(t,0,1)$ векторлору компланардуу болушат?

№ 67. $\bar{a}$, $\bar{b}$ жана $\bar{c}$ векторлору оң үчтүктү түзүшөт жана өз ара перпендикуляр. Эгерде $|\bar{a}|=4, |\bar{b}|=2, |\bar{c}|=3$ болсо, анда $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ эмнеге барабар?

№ 68. $\bar{a}\perp\bar{c},\ \bar{b}\perp\bar{c},\ (\bar{a},\ \bar{b})=30^0,\ |\bar{a}|=6, |\bar{b}|=3, |\bar{c}|=3$ болсо, анда $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ эмнеге барабар?

№ 69. $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{b}+\bar{c})(\bar{c}+\bar{a})=2(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ теңдештигин далилдегиле.

№ 70. $\overrightarrow{AB}=(3,6,3)$, $\overrightarrow{AC}=(1,3,-2)$ жана $\overrightarrow{AD}=(2,2,2)$ болсо, анда $ABCD$ тетраэдринин көлөмүн тапкыла.

№ 71. $ABCD$ тетраэдри берилген. M жана P чекиттери тиешелеш түрдө AB жана DC жактарынын орто чекиттери. $ABCD$ жана $AMCP$ тетраэдрлеринин көлөмүндөрүнүн катышын тапкыла.

№ 72. M жана N чекиттери $ABCD$ үч бурчтуу пирамидасынын AB жана BC жактарынын орто чекиттери. Эгерде $\overrightarrow{AB}=(2,2,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,-2,-2)$ жана $\overrightarrow{AD}=(3,4,0)$ болсо, анда CMD жана AND тегиздиктеринин арасындагы бурчту тапкыла.

$A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ жана $D(-5,-4,8)$ чокулуу тетраэдрдин D чекитинен түшүрүлгөн бийиктигин тапкыла.

III. Координаталар методу

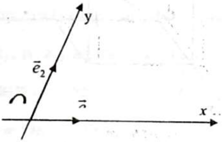
§6. Чекиттин координаталары

I. Аффиндик координаталар системасы

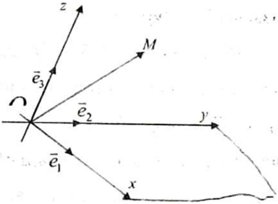
Аныктама 6.1. Багыты менен берилген түз сызык ***ок*** деп аталат.

Аныктама 6.2. Тегиздикте O чекитинде кесилишкен иреттелген (Ox) жана (Oy) октору тегиздиктеги **жалпы декарттык** же **аффиндик координаталар системасы** деп аталат (6.1- сүрөт).

Аныктама 6.3. Мейкиндикте O чекитинде кесилишкен бир тегиздикте жатпаган, иреттелген (Ox), (Oy) жана (Oz) октору мейкиндиктеги **жалпы декарттык** же **аффиндик координаталар системасы** деп аталат.



6.1- сүрөт



6.2- сүрөт

Мында O чекити координаталар системасынын **башталышы** болуп саналат.

(Oxy), (Oyz) жана (Oxz) октору **координаталык октор,** ал

эми (xOy), (yOz) жана (zOx) тегиздиктери **координаталык тегиздиктер** деп аталышат.

Биринчи координаталык ок **абсцисса**, экинчиси **ордината,** үчүнчүсү **аппликата** деп аталат.

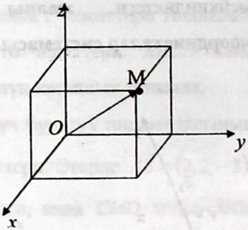
$\overline{OE_1} = \overline{e_1}$, $\overline{OE_2} = \overline{e_2}$ жана $\overline{OE_3} = \overline{e_3}$ векторлору координаталык октордун **масштабдык векторлору** деп аталышат. (6.2- сүрөт).

M – мейкиндиктин кандайдыр бир чекити болсун.

Аныктама 6.4. $\overline{OM}$ вектору M чекитинин **радиус-вектору** деп аталат.

$$\overline{OM} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3}, \tag{6.1}$$

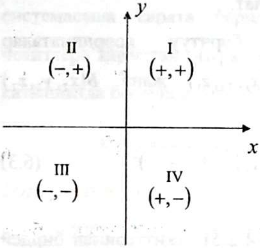
мында x, y жана z сандары M чекитинин мейкиндиктеги **координаталары** (абсциссасы, ординатасы, аппликатасы) деп аталышат жана $M(x, y, z)$ деп жазылат (6.3-сүрөт).



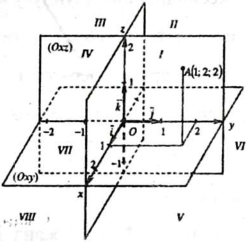
6.3-сүрөт

Аныктама 6.5. Эгерде координаталык октор өз ара перпендикуляр болушса жана масштабдык векторлору бирдей узундукка ээ болушса, анда жалпы декарттык координаталар системасы **тик бурчтуу координаталар системасы** деп аталат жана $(Oxyz)$ деп белгиленет.

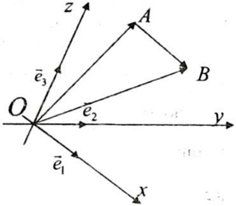
Координаталык октор тегиздикти **чейректер (квадранттар)** деп аталуучу төрт тик бурчка (6.4-сүрөт), ал эми координаталык тегиздиктер мейкиндикти 8 октантага бөлөт (6.5-сүрөт).



6.4-сүрөт



6.5-сүрөт



6.6-сүрөт

Мейкиндикте координаталары $(1,2,2)$ болгон A чекити 6.5-сүрөттө көрсөтүлгөн.

Мейкиндикте $(Oxyz)$ координаталар системасына карата $A(x_1, y_1, z_1)$ жана $B(x_2, y_2, z_2)$ чекиттери берилсин (6.6-сүрөт). $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ болгондуктан, $\overline{AB}$ векторунун координаталары

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1) \tag{6.2}$$

болот.

II. Эки чекиттин арасындагы аралык

Аныктама 6.6. *A* жана *B* чекиттеринин арасындагы **аралык** деп, $[AB]$ кесиндисинин узундугу аталат.

Мейкиндикте $(Oxyz)$ тик бурчтуу координаталар системасына карата берилген $A(x_1, y_1, z_1)$ жана $B(x_2, y_2, z_2)$ чекиттеринин арасындагы аралык

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (6.3)$$

формуласы менен табылат.

Мисал 6.1. $A(2,-3,-7)$ жана $B(-4,2,5)$ чекиттеринен бирдей алыстыкта жаткан (Oy) огундагы чекитти тапкыла.

Чыгаруу. $X(x,y,z)$ – изделүүчү чекит болсун. Бул чекит *A* жана *B* чекиттеринен бирдей алыстыкта жаткандыктан, $|AX| = |BX|$ болот. (6.3) боюнча

$$|AX| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2}\,;\ |BX| = \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}\,.$$

X чекити (Oy) огунда жаткандыктан, анын абсциссасы *x* жана аппликатасы *z* нөлгө барабар болот, ошондуктан $\sqrt{2^2 + (y+3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4^2 + (y-2)^2 + (-5)^2} \Rightarrow y = -1{,}7$. Ошентип, $X(0, -1.7, 0)$ чекити изделүүчү чекит болот.

III. Кесиндини берилген катышта бөлүү

Аныктама 6.7. Эгерде

$$\overline{AP} = \lambda \cdot \overline{PB} \qquad (6.4)$$

шарты орун алса, анда ***P* чекити** $[AB]$ **кесиндисин** $\lambda \neq -1$

катышында бөлөт деп аталат.

Мейкиндикте $(Oxyz)$ тик бурчтуу координаталар системасына карата берилген $A(x_1,y_1,z_1)$ жана $B(x_2,y_2,z_2)$ чекиттери кармаган $[AB]$ кесиндиси $P(x,y,z)$ чекити менен $\lambda \neq -1$ катышында бө-лүнсө, анда P чекитинин координаталары:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{6.4}$$

формулалары менен табылат.

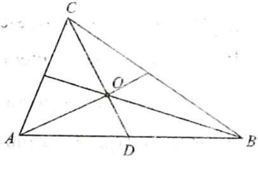
Эгерде P чекити $[AB]$ кесиндисинин орто чекити болсо, анда анын координаталары

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}; \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}; \quad z=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{6.5}$$

формулалары менен табылат.

Мисал 6.2. Чокулары $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ чекиттеринде болгон үч бурчтуктун оордук борборунун координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. $O(x,y,z)$ чекити берилген үч бурчтуктун оордук борбору (медианаларынын кесилиш чекити), ал эми $D(d_1,d_2,d_3)$ чекити $[AB]$ кесиндисинин орто чекити болсун. Анда Dнын координаталары $d_1=\frac{4+2}{2}=3$; $d_2=2$; $d_3=0$.



6.7- сүрөт

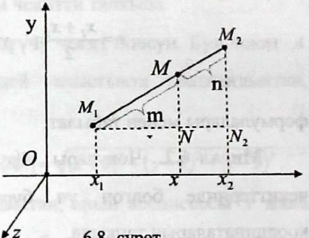
Үч бурчтуктун медианаларынын кесилиши медианаларды үч бурчтуктун чокусунан баштап эсептегенде 2:1 катышында бөлгөндүктөн, $\frac{[CO]}{[OD]} = \lambda = 2$ болот. Демек,

$$x = \frac{x_3 + 2d_1}{1+2}, \quad y = \frac{y_3 + 2d_2}{1+2}, \quad x = \frac{z_3 + 2d_3}{1+2}.$$

D чекитинин координаталарын бул барабардыктарга коюп, төмөнкү барабардыктарга ээ болобуз:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad x = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Маселе 6.3. Четки чекиттери $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ болгон кесинди берилген. Бул кесиндини m жана n сандарына пропорционалдуу болгон кесиндилерге бөлүүчү $M(x, y, z)$ чекитинин координаталарын тапкыла (6.8-сүрөт).



6.8- сүрөт

Чыгаруу. $[M,M]$ кесиндиси m бирдикке (см; м; карыш), $[MM_2]$ кесиндиси ушундай эле n бирдикке ээ болсун. Бизге керек формуланы M,M_2N_2 жана M_1MN тик бурчтуу үч бурчтуктардын окшоштугунан алабыз. Мында $MN \| (Oy)$, $M_2N_2 \| (Oy)$ жана $\frac{[M_1N_2]}{[M_1M_2]} = \frac{[M_1N]}{[M_1M]}$. Анда $\frac{x_2 - x_1}{m+n} = \frac{x - x_1}{m}$ барабардыгына ээ болобуз. Мындан x ти табалы:

$$x = \frac{n x_1 + m x_2}{n+m}.$$

Ушуга окшош эле $y = \dfrac{n y_1 + m y_2}{n+m}$, $z = \dfrac{n z_1 + m z_2}{n+m}$ табууга болот.

№ 73. Эгерде

1) $P(1,4)$, $Q(3,-1)$, $R(0,2)$; **2)** $P(-1,0)$, $Q(2,1)$, $R(4,-1)$

болсо, анда P, Q жана R чокулуу параллелограммдын төртүнчү чокусунун координаталарын тапкыла.

№ 74. Координата окторунда жаткан жана $A(1,1)$, $B(-3,7)$ чекиттеринен бирдей алыстатылган чекиттерди тапкыла.

№ 75. Чокулары $A(1,4)$, $B(8,8)$, $C(5,2)$ чекиттери болгон үч буртуктун тик бурчтуу экендигин далилдегиле.

№ 76. $A(0,1)$, $B(2,3)$, $C(-1,4)$ чекиттери аркылуу өткөн айлананын борборун тапкыла.

№ 77. $A(2,-3)$, $B(-1,5)$, $C(-4,13)$ чекиттеринин бир түз сызыкта жатаарын далилдегиле.

№ 78. Эгерде B чекити $A(4,-1)$ чекитине биринчи координаттык бурчтун биссектрисасына карата симметриялуу болсо, анда AB нын узундугун тапкыла.

№ 79. Чокулары $A(5,-4)$, $B(-1,2)$, $C(5,1)$ чекиттери болгон үч бурчтуктун AK медианасынын узундугун тапкыла.

№ 80. Чокулары $A(4,1)$, $B(7,5)$, $C(-4,7)$ чекиттери болгон үч бурчтуктун AD биссектрисасынын узундугун тапкыла.

№ 81. Квадраттын $A(-2,1)$ жана $B(3,3)$ жандаш чокулары берилген. Калган эки чокусунун координаталарын тапкыла.

№ 82. Чокулары $A(11,-2)$, $B(-1,4)$ чекиттери болгон квадраттын аянтын тапкыла.

№ 83. Узуну 6 м, туурасы 3 м болгон тик бурчтуу столдун бир чокусун координата башталышы катары алып, столдун борборунун координаталарын аныктагыла:

1) столдун бетин биринчи квадрат;

2) столдун бетин экинчи квадрат деп алып.

№ 84. Таякчанын эки учу $A(5,-7)$ жана $B(-1,3)$ чекиттеринде жайгашкан. Бул таякчанын оордук борборунун координаталарын тапкыла.

№ 85. ABC үч бурчтугунун жактарынын орто чекиттери $P(5,3)$, $Q(-1,5)$ жана $R(1,6)$ чекиттери болуп саналат. Үч бурчтуктун чокуларынын координаталарын тапкыла.

№ 86. $A(13,5)$, $B(4,2)$ жана $C(-2,4)$ чокулуу үч бурчтуктун оордук борбору О нун координаталарын тапкыла.

№ 87. Үч бурчтуктун оордук борборун анын жактарынын орто чекиттери аркылуу туюнткула.

№ 88. $A(7,11)$ жана $B(4,5)$ чекиттери берилген.

1) B чекитине карата A чекитине симметриялуу болгон P чекитинин координаталарын;

2) A чекитине карата B чекитине симметриялуу болгон Q чекитинин координаталарын тапкыла.

№ 89. Эгерде $ABCDEFGH$ бир тектүү пластинкасында

$|AH| = 10$см, $|AB| = 7$см, $|CD| = 4$см, $|DE| = 4$см, $|FG| = 1$см болсо, анда пластиканын оордук борбору Pны тапкыла.

№ 90. Жактары 3см, 4см, 5см болгон үч бурчтуктун оордук борборун тапкыла.

№ 91. Чокулары $A(4,4)$, $B(5,7)$, $C(10,10)$, $D(12,4)$ чекиттеринде болгон төрт бурчтуу пластинканын оордук борборун тапкыла.

№ 92. Четки чекиттери $A(1,-3)$ жана $B\ (4,3)$ болгон кесинди бирдей үч бөлүккө бөлүнгөн. Бөлүүчү чекиттердин координаталарын тапкыла.

№ 93. Мейкиндикте A жана B чекиттеринин арасындагы аралыкты тапкыла:

1) $A(3,5,1)$, $B(7,8,4)$; **2)** $A(-3,0,4)$, $B(-2,-4,6)$.

№ 94. Борбору $O(1,1,6)$ чекити болгон жана $A(-2,0,2)$ чекити аркылуу өткөн сферанын радиусун тапкыла.

№ 95. (Oxz) тегиздигинде $A(1,1,1)$, $B(-1,1,0)$, $C(3,1,-1)$ чекиттеринен бирдей алыстыктагы чекитти тапкыла.

№ 96. Бөлмөнүн полун, кесилишүүчү эки дубалын координаталык тегиздиктер жана бөлмөнү биринчи октант деп эсептеп, бөлмөнүн шыбынын борборуна асылган, шнурунун узундугу 1м болгон лампочканын координаталарын аныктагыла. Мында бөлмөнүн узуну 8м, туурасы 6м жана бийиктиги 4м.

№ 97. $A(1,0,4)$ жана $B\ (3,-1,2)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыкта $AC = 3AB$ жана B чекити A жана C чекиттеринин арасында жата тургандай C чекитинин координаталарын тапкыла.

№ 98. Шоола эки координата огу менен 60^0 бурчту түзсө, анда ал үчүнчү ок менен кандай бурчту түзөт?

№ 99. Эгерде $\overline{OM}$ вектору Ox огу менен 45^0ту Oz огу менен 60^0ту түзүп, узундугу 8 болсо, анда M чекитинин координаталарын тапкыла.

§7. Координаталарды өзгөртүп түзүүлөр

Мейкиндикте $\Re=\{O,\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$ – “эски”, $\Re'=\{O',\overline{e_1'},\overline{e_2'},\overline{e_3'}\}$ – “жаңы” координаталар системалары берилсин.

“Эски” координаталар системасынан “жаңы” координаталар системасына өтүү төмөндөгү формулалар менен жүргүзүлөт:

$$\begin{cases}\overline{e_1'}=a_{11}\overline{e_1}+a_{12}\overline{e_2}+a_{13}\overline{e_3},\\ \overline{e_2'}=a_{21}\overline{e_1}+a_{22}\overline{e_2}+a_{23}\overline{e_3},\\ \overline{e_3'}=a_{31}\overline{e_1}+a_{32}\overline{e_2}+a_{33}\overline{e_3}.\end{cases} \tag{7.1}$$

Мында a_{ij} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ – $\overline{e_1'}$, $\overline{e_2'}$, $\overline{e_3'}$ векторлорунун $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$ базисиндеги координаталары.

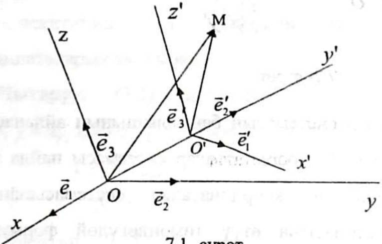
Мейкиндиктеги каалагандай M чекитинин “эски” координаталар системасындагы (x,y,z) координаталары менен “жаңы” координаталар системасындагы (x',y',z') координаталары төмөндөгүдөй байланышат:

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{21}y+a_{31}z+x_0,\\ y'=a_{12}x+a_{22}y+a_{32}z+y_0,\\ z'=a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+z_0,\end{cases} \tag{7.2}$$

мында (x_0,y_0,z_0) – O' чекитинин $\Re$ системасындагы координаталары (7.1-сүрөт).

(7.2) – **координаталарды өзгөртүп түзүү (же координаталарды өзгөртүү) формулалары** деп аталат.

Эгерде $\mathfrak{R}$ жана $\mathfrak{R}'$ тик бурчтуу координаталар системалары болсо, анда $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицасы ортогоналдык матрица болот, башкача айтканда ар бир жолчонун (мамычанын) элементтеринин квадраттарынын суммасы 1ге, ал эми каалагандай эки жолчонун (мамычасынын) тиешелеш элементтеринин көбөйтүндүсүнүн суммасы 0гө барабар болот.



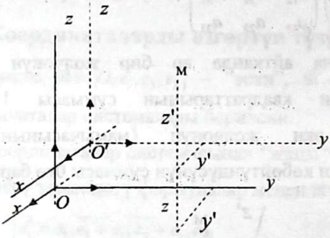
7.1- сүрөт

Эгерде *detA*=1 (*detA*=-1) болсо, анда $\mathfrak{R}$ жана $\mathfrak{R}'$ бирдей (карама-каршы) ориентацияда болушат.

Бул учурда $\mathfrak{R}$ координаталар системасын $\mathfrak{R}'$ координаталар системасына координаталар окторун өзгөртпөстөн параллель көчүрүү

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \\ z = z' + z_0 \end{cases} \tag{7.3}$$

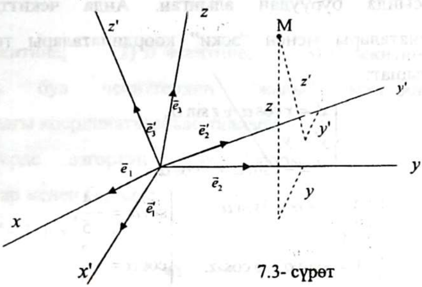
формулалары менен аныкталат (7.2-сүрөт).



7.2- сүрөт

$\mathfrak{R}$ координаталар системасын башталышынын айланасында α бурчуна буруудан $\mathfrak{R}'$ координаталар системасы пайда болот жана бул учурда $\mathfrak{R}$ координаталар системасынан $\mathfrak{R}'$ координаталар системасына өтүү төмөндөгүдөй формулалар менен аныкталат (7.3-сүрөт):

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{7.4}$$



7.3- сүрөт

Мисал 7.1. $\Re=\{O,\overline{e_1},\overline{e_2}\}$ координаталар системасына карата $M(-4,2)$, ал эми $\Re'=\{O',\overline{e_1'},\overline{e_2'}\}$ системасында $M(-5,-1)$ болсун. O' чекитинин $\Re$ координаталар системасындагы координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. (7.3) формулаларды тегиздикте карайлы. $x=-4,\ y=2,\ x'=-5,\ y'=-1$ болгондуктан,

$$\begin{cases}-4=-5+x_0,\\ 2=-1+y_0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=1,\\ y_0=3.\end{cases}$$

Ошентип, $O'(1,3)$.

Мисал 7.2. $\Re=\{O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ координаталар системасына карата M чекити $(1,6,3)$ координаталарына, ал эми $\Re'=\{O',\overline{e_1'},\overline{e_2'},\overline{e_3'}\}$ системасына карата (-3,6,-1) координаталарына ээ болсун. $\Re$ системасы (Oy) огунун айланасында кандай бурчка бурулган?

Чыгаруу. $\Re'$ системасы $\Re$ системасын (Oy) огунун айланасында буруудан алынган. Анда чекиттин “жаңы” координаталары менен “эски” координаталары төмөндөгүдөй байланышат:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + z\sin\alpha, \\ y' = y, \\ z' = -x\sin\alpha + z\cos\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = \cos\alpha + 3\sin\alpha, \\ 6 = 6, \\ -1 = -\sin\alpha + 3\cos\alpha. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -\dfrac{4}{5}, \\ \cos\alpha = -\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Мындан $\alpha = \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$ келип чыгат. $\sin\alpha < 0, \cos\alpha < 0$ болгондуктан, α бурчу экинчи квадранта жатат.

№ 100. $\Re = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ координаталар системасынын башталышы (октордун багыттары өзгөрүлбөгөн учурда)

1) $A(3,4)$; **2)** $B(-2,1)$; **3)** $C(-3,5)$

чекитине параллель көчүрүлгөндөгү координаталарды өзгөртүп түзүү формулаларын жазгыла.

№ 101. Эгерде $\Re = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ координаталар ситемасынын башталышы $O'(3,-4)$ чекитине параллель көчүрүлүп, ал эми $A(1,3)$, $B(-3,4)$ жана $C(-1,4)$ чекиттери “жаңы” координаталар системасына карата аныкталган чекиттер болсо, анда бул чекиттердин “эски” координаталар системасындагы координаталарын тапкыла.

№ 102. $A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(-2,5)$ чекиттери берилген. Эгерде координаталар башталышы октордун багыттары өзгөрүлбөгөн учурда

1) A чекитине; **2)** B чекитине; **3)** C чекитине

өтсө, анда бул чекиттердин "жаңы" координаталар системасындагы координаталарын тапкыла.

№ 103. Эгерде өзгөртүп түзүү формулалары төмөнкү барабардыктар менен берилсе:

1) $x = x' + 3,\ y = y' + 5$; **2)** $x = x' - 2,\ y = y' + 1$;

3) $x = x',\ y = y' - 1$; **4)** $x = x' - 5,\ y = y'$,

анда "жаңы" координаталар системасынын O' башталышынын "эски" координаталар системадагы координаталарын тапкыла.

№ 104. Координаталар системасынын октору

1) 60^0; **2)** -45^0; **3)** 90^0; **4)** -90^0; **5)** 180^0

бурчуна бурулса, анда өзгөртүп түзүү формулаларын жазгыла.

№ 105. Эгерде координаталык октор бурчуна бурулса, анда "жаңы" координаталар системасындагы $A\left(2\sqrt{3},4\right)$, $B\left(\sqrt{3},0\right)$ жана $C\left(0,-2\sqrt{3}\right)$ чекиттеринин "эски" координаталар системасындагы координаталарын тапкыла.

№ 106. $M(3,1), N(-1,5)$ жана $P(-3,-1)$ чекиттери берилген. Эгерде координаталык октор

1) -45^0; **2)** 90^0; **3)** -90^0; **4)** 180^0

бурчуна бурулса, анда бул чекиттердин "жаңы" координаталар системасындагы координаталарын тапкыла.

№ 107. Эгерде координаталарды өзгөртүп түзүү формулалары төмөнкү барабардыктар менен берилсе, анда октордун бурулуу бурчун тапкыла:

1) $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y',\ \ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$;

2) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y',\ \ y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$.

№ 108. Эгерде $A(3,4)$ чекити “жаңы” абсциссада, $B(2,3)$ чекити “жаңы” ординатада жатышып, “эски” система менен “жаңы” системанын октору бирдей багытта болушса, анда “жаңы” системанын башталышы болгон O'тин координаталарын тапкыла.

№ 109. $A(5,5)$, $B(2,-1)$, $C(12,-6)$ чекиттери берилген. Эгерде координата башталышы B чекитине көчүрүлүп, координата октору $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ бурчуна бурулса, анда бул чекиттердин “жаңы” системадагы координаталарын тапкыла.

№ 110. Эгерде координаталарды өзгөртүп түзүү формулалары төмөнкү барабардыктар менен берилсе, “жаңы” башталыштын “эски” координаталарын жана окторду буруунун α бурчун тапкыла:

1) $x = -y' + 3,\ \ y = x' - 2$; **2)** $x = -x' - 1,\ \ y = -y' + 3$;

3) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 5,\ \ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 3$.

№ 111. Эгерде “эски” системанын бирдик векторлору катары параллелепипеддин бир чокудан чыккан үч кыры, ал эми “жаңы” системанын бирдик векторлору катары бул чокуга карама-каршы чокудан чыккан бул кырларга параллель болгон үч кыр алынса, анда “жаңы” системадан “эски” системага өтүүнүн формулаларын тапкыла.

№ 112. $\Re = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ жана $\Re' = \{O', \overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}\}$ системалары берилген. Эгерде $\Re$ системасына карата O' чекитинин координаталары $(2,1,3)$, ал эми $\overline{e_1'} = (2,4,1)$, $\overline{e_2'} = (0,4,4)$, $\overline{e_3'} = (1,1,0)$ болсо, анда.

1) чекиттин "эски" координаталарын "жаңы" координаталары аркылуу туюнткула;
2) чекиттин "жаңы" координаталарын "эски" координаталары аркылуу туюнкула;
3) O чекитинин жана $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ векторлорунун "жаңы" системадагы координаталарын тапкыла.

№ 113. Эгерде чекиттин "эски" системадагы (x, y, z) координаталары "жаңы" системадагы (x', y', z') координаталары менен $x = -2x' - y' - z' - 1$, $y = -y' - z'$, $z = x' + 3y' + z' + 1$ барабардыктары боюнча байланышса, анда

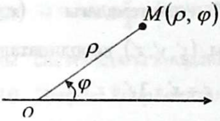
1) (x', y', z') координаталарын (x, y, z) координаталары аркылуу туюнткула;
2) O' чекитинин жана $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$ векторлорунун "эски" системадагы координаталарын тапкыла;
3) O чекитинин жана $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ векторлорунун "жаңы" системадагы координаталарын тапкыла.

§8. Тегиздикте уюлдук координаталар системасы

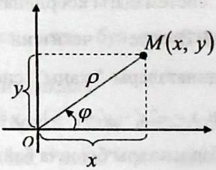
Тегиздикте уюлдук координаталар системасы O чекити, андан чыккан $[Ox)$ шооласы, e бирдик масштабы жана φ бурчу менен аныкталат. Мында O – **уюл,** $[Ox)$ – **уюлдук ок.**

M – тегиздиктин O чекитинен айырмалуу болгон каалаган чекити болсун. Анда ал ρ, φ уюлдук координаталары менен аныкталат. Мында ρ – M чекитинин **уюлдук радиусу,** φ – **уюлдук бурчу** деп аталат жана $M(\rho, \varphi)$ деп белгиленет (8.1-сүрөт).

O чекити үчүн уюлдук радиус $\rho = 0$, ал эми φ уюлдук бурчу аныкталбайт. $\rho = \left|\overline{OM}\right|$, $\varphi = \left([Ox), \wedge \overline{OM}\right)$, $o \le \rho < \infty$, $o \le \varphi < 2\pi$.



8.1- сүрөт



8.2- сүрөт

Тик бурчтуу координаталар системасы менен уюлдук координаталар системасынын ортосундагы байланыш төмөндөгүдөй болот:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{8.1}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \tag{8.2}$$

$A(\rho_1, \varphi_1)$; $B(\rho_2, \varphi_2)$ чекиттеринин арасындагы аралык

$$|AB| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\,\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \tag{8.3}$$

формуласы менен аныкталат.

Мисал 8.1. Эгерде уюл тик бурчтуу координаталар системасынын башталышы менен, ал эми уюлдук ок абсцисса огу менен дал келсе, анда $M\left(5, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ чекитинин тик бурчтуу координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. $x = \rho\,cos\,\varphi = 5\,cos\dfrac{5\pi}{6} = 5\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$,

$$y = \rho\,sin\,\varphi = 5\,sin\frac{5\pi}{6} = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Ошентип, $M\left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

Мисал 8.2. Эгерде тик бурчтуу координаталар системасынын башталышы уюл менен, ал эми абсцисса огу уюлдук ок менен дал келсе, анда $A(1, -\sqrt{3})$ чекитинин уюлдук координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$,

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\cos\varphi > 0,\ \sin\varphi < 0$ болгондуктан, A чекити төртүнчү чейректе жатат. Ошондуктан $\varphi = \frac{5\pi}{3}$. Ошентип, $A\left(2, \frac{5\pi}{2}\right)$.

Мисал 8.3. $A\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$ жана $B\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ чекиттеринин арасындагы аралыкты тапкыла.

Чыгаруу. (8.3)тү пайдаланалы:

$$|AB| = \sqrt{9+4-2\cdot 3\cdot 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{13-12\cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{13}.$$

№ 114. Уюлдук координаталары төмөндөгүдөй болгон чекиттерди тургузгула:

$$\left(3, \frac{\pi}{6}\right), \left(1, \frac{5\pi}{3}\right), \left(5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, \frac{2\pi}{3}\right), (6, \pi), \left(-2, \frac{\pi}{4}\right), \left(\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}\right).$$

№ 115. Уюлдук координаталар менен берилген $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$ чекиттеринин тик бурчтуу координаталарын тапкыла. Мында уюлдук ок (Ox) менен, уюл координаталар башталышы менен дал келет.

№ 116. $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$, $C(5, 0)$ чекиттеринин уюлдук координаталарын тапкыла.

№ 117. Туура алты бурчтук берилген. Анын бир чокусун уюл, ал эми бул чокудан чыккан бир жагын уюлдук ок деп эсептеп, калган 5 чокусунун координаталарын тапкыла.

№ 118. Төмөндөгү берилген эки чекиттин арасындагы аралыкты тапкыла:

1) $A\left(2, \dfrac{\pi}{12}\right)$ жана $B\left(1, \dfrac{5\pi}{6}\right)$; **2)** $C\left(4, \dfrac{\pi}{5}\right)$ жана $D\left(6, \dfrac{6\pi}{5}\right)$;

3) $E\left(3, \dfrac{11\pi}{18}\right)$ жана $F\left(1, \dfrac{\pi}{9}\right)$.

№ 119. $A\left(8, -\dfrac{2}{3}\pi\right)$, $B\left(6, \dfrac{\pi}{3}\right)$ чекиттери берилген. AB кесиндисинин орто чекитинин уюлдук координаталарын тапкыла.

№ 120. Уюлдук координаталар системасына карата $A\left(5, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ чекити берилген.

1) Уюлга карата A чекитине симметриялуу болгон чекитти;

2) Уюлдук окко карата A чекитине симметриялуу болгон чекитти тапкыла.

№ 121. Уюлдук координаталар системасына карата $A\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$, $B\left(3, \dfrac{4\pi}{3}\right)$, $C\left(1, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $D(5, \pi)$, $E(5, 0)$ чекиттери берилген. Эгерде уюлдук окту уюлдун айланасында $+\dfrac{3\pi}{4}$ градуска бурсак, анда бул чекиттердин координаталары кандай болуп өзгөрөт?

№ 122. Бир чокусу уюлда, калган эки чокусу $\left(4, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(1, \dfrac{5\pi}{18}\right)$

чекиттеринде болгон үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

№ 123. Эгерде уюл $(2, 3)$ чекитинде болуп, уюлдук ок (Ox) огуна параллель болсо, анда $M\left(10, \dfrac{\pi}{6}\right)$ чекитинин тик бурчтуу координаталарын тапкыла.

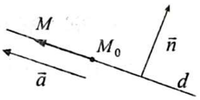
№ 124. Эгерде уюл $(3, 5)$ чекитинде, ал эми уюлдук ок (Oy) огунун оң багытына параллель болсо, анда $M(9,-1)$ жана $N\left(5,-2\sqrt{3}\right)$ чекиттеринин уюлдук координаталарын тапкыла.

IV. Тегиздиктеги түз сызыктар

§9. Тегиздикте түз сызыктын түрдүүчө берилиш жолдору

Тегиздикте d түз сызыгы берилсин. $M_0 - d$ түз сызыгынын баштапкы чекити болсун (9.1-сүрөт).

Аныктоо 9.1. Түз сызыкка параллель болгон $\bar{a}$ вектору түз сызыктын **багыттоочу вектору** деп аталат.



9.1-сүрөт

M чекити d түз сызыгында жаткан учурда гана $\overline{M_0M} \parallel \bar{a}$ болот. Ошондуктан

$$\overline{M_0M} = t\,\bar{a},\ \ t \in R \qquad (9.1)$$

теңдемеси түз сызыктын **вектордук көрүнүштөгү параметрдик теңдемеси** деп аталат, мында t – параметр.

$\Re = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ координаталар системасына карата M_0 чекитинин координаталары (x_0, y_0), $\bar{a}$ векторунун координаталары (a_1, a_2), M чекитинин координаталары (x, y) болсо, анда (9.1) теңдеме төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$\begin{cases} x = a_1 t + x_0, \\ y = a_2 t + y_0. \end{cases} \qquad (9.2)$$

(9.2) теңдеме түз сызыктын **координаталык көрүнүштөгү параметрдик теңдемелери** деп аталат.

(9.2) теңдемеден t параметрин туюнтууда түз сызыктын төмөндөгү **каноникалык теңдемесине** ээ болобуз:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}. \tag{9.3}$$

(9.3) теңдемени төмөндөгүдөй көрүнүштө да жазууга болот:

$$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0. \tag{9.4}$$

Аныктоо 9.2. Түз сызыкка перпендикуляр болгон $\bar{n}$ вектору түз сызыктын **нормаль вектору** деп аталат.

(9.4) теңдемеден $\bar{n}$ векторунун координаталары (a_2,a_1) болушу келип чыгат. $\overline{M_0M}\perp\bar{n}$, б.а. $\overline{M_0M}\cdot\bar{n}=0$. Ошондуктан (9.4) теңдеме түз сызыктын **нормаль аркылуу теңдемеси** деп аталат.

(9.4) теңдемеден түз сызыктын **жалпы теңдемесине** ээ болобуз:

$$Ax+By+C=0, \tag{9.5}$$

мында $A=a_2$, $B=-a_1$, $C=-a_2x_0+a_1y_0$.

(9.5) теңдемеден $\bar{a}(-B,A)$, $\bar{n}(A,B)$ экендиги келип чыгат.

Түз сызыктын каноникалык теңдемесинин жардамында $M_1(x_1,y_1)$ жана $M_2(x_2,y_2)$ **эки чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин** жазууга болот:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \text{ же } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{9.6}$$

Түз сызыктын жалпы теңдемесин y ке карата чечүү менен, мында $B\neq 0$, түз сызыктын **бурчтук коэффициенти менен бе-**

рилген теңдемесине ээ болобуз:

$$y = kx + b, \tag{9.7}$$

мында $k = -{}^{A}\!/_{B}$, $b = -{}^{C}\!/_{B}$. k – бурчтук коэффициент, b– баштапкы ордината.

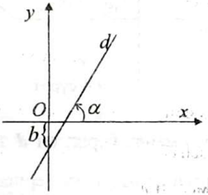
$$k = tg\alpha, \tag{9.8}$$

мында α – (Ox) огу менен түз сызыктын арасындагы оң багыт боюнча алынган бурч (9.2-сүрөт).

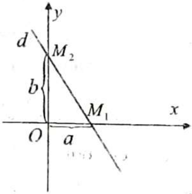
Бул учурда (9.4) теңдеме

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{9.9}$$

көрүнүшүндө болот.



9.2-сүрөт



9.3-сүрөт

Эгерде $M_1 = (a, 0)$ жана $M_2 = (0, b)$ болсо, анда (9.6) теңдеме төмөндөгү көрүнүшкө келет:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{9.10}$$

(9.10) түз сызыктын **кесиндилердеги теңдемеси** болуп саналат (9.3-сүрөт).

(9.5) теңдеменин эки жагын тең $\mu = \dfrac{1}{\mp\sqrt{A^2 + B^2}}$ – нормаланган көбөйтүүчүгө көбөйтсөк (мында радикал алдындагы белги Cнын белгисине карама-каршы алынат), анда ал төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

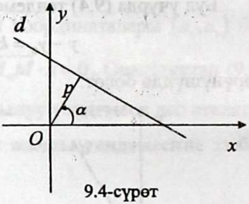
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{9.11}$$

мында $\cos\alpha = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, $p = -\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$,

p – координата башталышынан түз сызыкка түшүрүлгөн перпендикуляр;

α – бул перпендикуляр менен (Ox) огунун арасындагы оң багыт боюнча алынган бурч. (9.4-сүрөт).

(9.11) теңдеме түз сызыктын **нормалдык теңдемеси** деп аталат.

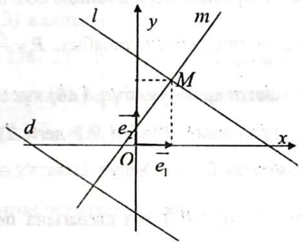


9.4-сүрөт

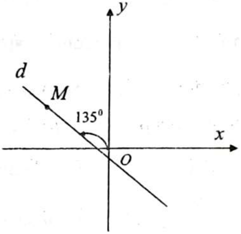
Мисал 9.1. $M(1,2)$ чекити аркылуу өтүп, $x+2y+3=0$ теңдемеси менен берилген d түз сызыгына параллель болгон l түз сызыгынын жана ага перпендикуляр болгон m түз сызыгынын теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. 1) Изделип жаткан l түз сызыгы d түз сызыгына параллель болгондуктан, алар (Ox) огу менен бирдей бурчту түзүшөт. d түз сызыгынын (Ox) огу менен түзгөн бурчун $k = -A/B$ формуласынан табууга болот. Мында $A=1$; $B=2$ болгондуктан, $k=-0{,}5$ болот. (9.9) теңдемени пайдаланалы: $y-2=(-0{,}5)\cdot(x-1)$. Мындан $x+2y-5=0$ түз сызыгына ээ болобуз (9.5-сүрөт).

2) d түз сызыгынын $\overline{n}=(A,B)$ нормаль вектору изделип жаткан m түз сызыгынын багыттоочу вектору болот. Ошондуктан m түз сызыгынын теңдемесин жазуу үчүн (9.3) теңдемени пайдаланалы. Мында $A=a_1=1, B=a_2=2$. Анда $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}$ теңдемесине, б.а. $2x-y=0$ теңдемесине ээ болобуз.



9.5-сүрөт



9.6-сүрөт

Мисал 9.2. $M(-4,3)$ чекити аркылуу өтүп, (Ox) огу менен 135^0тук бурчту түзгөн түз сызыктын теңдемесин жазгыла (9.6-сүрөт).

Чыгаруу. (9.8), (9.9) формулаларын пайдаланалы. $k=tg135^0=-1$ болгондуктан, түз сызык $y-3=--(x+4)$ же $x+y+1=0$ теңдемесине ээ болот.

Мисал 9.3. $A(3,-5)$, $B(1,1)$, $C(-3,7)$ чокулуу үч бурчтуктун сыртына сызылган айлананын теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. ABC үч бурчтугунун жактарынын теңдемесин табалы. Ал үчүн эки чекит аркылуу өткөн түз сызыктын (9.6) теңдемесин пайдаланабыз:

$$(AB):\ \frac{x-3}{-2}=\frac{y+5}{6} \quad \text{же} \quad 3x+y-4=0;$$

$$(AC):\ \frac{x-3}{-6}=\frac{y+5}{12} \quad \text{же} \quad 2x+y-1=0.$$

Үч бурчтукка сырттан сызылган айлананын борбору үч бурчтуктун жактарынын орто перпендикулярынын кесилишинде болгондуктан, бул перпендикулярлардын теңдемесин табабыз. $P=\frac{AB}{2}$ болсун, анда $P(2,-2)$ болот. P чекити аркылуу өтүп, (AB) түз сызыгына перпендикуляр болгон түз сызык (Мисал 9.1 деги 2)си боюнча) $x-3y-8=0$ теңдемесине ээ болот. Ушул сыяктуу эле $Q=\frac{AC}{2}$, $Q(0,1)$ чекити аркылуу өтүп, (AC) түз сызыгына перпендикуляр болгон түз сызыктын $x-2y+2=0$ теңдемесине ээ болобуз.

Үч бурчтукка сырттан сызылган айлананын O борборун табуу үчүн жогоруда табылган эки орто перпендикулярдын кесилишин табуу жетиштүү:

$$\begin{cases} x-3y-8=0, \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow x=-22,\ y=-10.\ O(-22,-10).$$

$r=\left|\overline{OA}\right|$ – айлананын радиусу болсун. Эки чекиттин арасындагы аралыкты табуучу (6.2) формуласы боюнча $r=\sqrt{650}$ экендиги келип чыгат.

Ошентип, биз издеп жаткан айлананын теңдемеси төмөнкү көрүнүштө болот: $(x+22)^2+(y+10)^2=650.$

№ 125. $M(2,\ 3)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{a}(1,-4)$ векторуна коллинеардуу болгон түз сызыктын

1) канондук теңдемесин;
2) параметрдик теңдемелерин;
3) жалпы теңдемесин жазгыла.

№ 126. $2x-y+5=0$ түз сызыгы берилген. Төмөнкү чекиттердин кайсылары берилген түз сызыкта жатат:

$A_1(5,15)$, $A_2(1,1)$, $A_3(0,0)$, $A_4(0,5)$, $A_5(-1,3)$, $A_6(-2,1)$?

№ 127. $x+3y-1=0$ түз сызыгында жаткан, абсциссасы 1; 0; 4; -5 болгон чекиттерди тапкыла.

№ 128. Төмөнкү түз сызыктардын багыттоочу вектору $\vec{a}$ нын координаталарын тапкыла:

1) $x=2t+3,\ \ y=t-1;$
2) $5x+4y-3=0;$
3) $y=7x-3;$
4) $x-2y+2=0;$
5) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+3}{2}.$

№ 129. Координата башталышы жана (-2,3) чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 130. Түз сызык $\begin{cases} x=2+7t, \\ y=-5-3t \end{cases}$ параметрдик теңдемелери менен берилген. Түз сызыктын жалпы теңдемесин жана бурчтук коэффициентин тапкыла.

№ 131. $3x-7y+11=0$ түз сызыгынын параметрдик теңдемелерин жазгыла.

№ 132. $M(2,1)$ чекити аркылуу өтүп, $2x+3y+4=0$ түз сызыгына параллель болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 133. Чокулары A(-1,2), B(3,-1), C(0,4) болгон үч бурчтук берилген. Бул үч бурчтуктун ар бир чокусу аркылуу өтүп, бул чокуга карама-каршы жаткан жакка параллель болгон түз сызыктардын теңдемелерин жазгыла.

№ 134. Чокулары A(4,6), B(-4,0), C(-1,-4) болгон үч бурчтук берилген. Бул үч бурчтуктун медианаларынын теңдемелерин жазгыла.

№ 135. **1)** A(1,3), B(5,7), C(10,12); **2)** P(-3,-8), Q(1,-2), R(10,12) үч чекити бир түз сызыкта жатышабы?

№ 136. **1)** координата башталышы;

2) M(1,3) чекити;

3) абсцисса огуна параллель болгон;

4) ордината огуна параллель болгон

жана $2x+5y-8=0$, $x-3y+4=0$ түз сызыктарынын кесилиш чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 137. $2x-5y-1=0$, $x+4y-7=0$ түз сызыктарынын кесилиш чекити аркылуу өткөн, учтары A(4,-3) жана B(-1,2) чекиттери болгон кесиндини 2:3 катышында бөлгөн түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 138. Бурчтук коэффициенти k жана баштапкы ординатасы b берилген. Түз сызыктын теңдемесин жазгыла:

1) $k=\frac{2}{3},\ b=3;$ **2)** $k=3,\ b=0;$

3) $k=0,\ b=-2;$ **4)** $k=-\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3}.$

№ 139. **1)** $5x-y+3=0;$ **2)** $2x+3y-6=0;$

3) $5x+3y+2=0;$ **4)** $3x+2y=0;$

5) $y-3=0$

түз сызыктарынын бурчтук коэффициентин жана баштапкы ординатасын тапкыла.

№ 140. $5x+3y-3=0$ түз сызыгы берилген. Берилген түз сызыкка

1) параллель; **2)** перпендикуляр

болгон түз сызыктын бурчтук коэффициентин тапкыла.

№ 141. Координата башталышы аркылуу өтүп, (Ох) огу менен

1) 30°; **2)** 45°; **3)** 60°; **4)** 120°; **5)** 135°; **6)** 150°

бурчту түзгөн түз сызыктын теңдемесин тапкыла.

№ 142. Жарыктын нуру $2x-3y-12=0$ түз сызыгы боюнча багытталып, абсцисса огуна келип чагылат. Нурдун абсцисса огу менен кесилиш чекитин тапкыла жана чагылган жарык нурунун теңдемесин аныктагыла.

№ 143. **1)** $A(-1,3)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{n}(2,1)$ векторуна перпендикуляр болгон;

2) B(5, 10) чекити аркылуу өтүп, $x-y+1=0$ түз сызыгына перпендикуляр болгон;

3) Координата башталышы аркылуу өтүп, $2x-3y+1=0$ түз сызыгына перпендикуляр болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 144. $A(-2,0)$, $B(2,4)$ жана $C(4,0)$ чокулуу үч бурчтуктун жактарынын, AE медианасынын, AK бийиктигинин теңдемелерин жазгыла жана AE медианасынын узундугун тапкыла.

№ 145. 1) $2x-3y-6=0$; **2)** $3x-2y+4=0$ түз сызыктарынын «кесиндилердеги» теңдемесин жазгыла жана түз сызыктарды түзгүлө.

№ 146. A(11, -4) чекити аркылуу өтүп, координата окторун оң жана өз ара барабар кесиндилерде кесип өткөн түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 147. 1) $x+4y-7=0$; **2)** $3x+4y-15=0$; **3)** $12x-5y+39=0$; **4)** $2x+3y=0$; **5)** $x+5=0$. түз сызыктарынын теңдемелерин нормалдык көрүнүштө жазгыла.

№ 148. Эгерде түз сызыктын р нормалынын узундугу 2ге, ал эми (Ox) огу менен түзгөн бурчу

1) 45°; **2)** 135°; **3)** 225°; **4)** 315°

болсо, анда түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 149. Эгерде H(-2,5) чекити координата башталышынан l түз сызыгына түшүрүлгөн перпендикулярдын негизи болуп саналса, анда l түз сызыгынын теңдемесин жазгыла.

№ 150. A(2,-3) жана B(3,-5) чекиттери берилген. AB кесиндисинин орто чекити аркылуу өтүп, ABга перпендикуляр болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 151. Эгерде жагы а болгон квадраттын диагоналдары координата окторунда жатышса, анда квадраттын жактарынын теңдемесин жазгыла.

№ 152. Төмөнкү барабарсыздыктардын геометриялык сүрөттөлүшүн көрсөткүлө:

1) $y > 3x + 1$; **2)** $y < 3x + 1$; **3)** $2x + y - 4 \geq 0$; **4)** $2x + y - 4 \leq 0$.

§10. Түз сызыктын координаталар системасына карата жайланышы. Эки түз сызыктын өз ара жайланышы. Түз сызыктардын боосу

I. Түз сызыктын координаталар системасына карата жайланышы

d түз сызыгы $\Re = \left\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right\}$ координаталар системасына карата $Ax + By + C = 0$ жалпы теңдемеси менен берилсин.

1. **Түз сызыктын координаталар башталышы аркылуу өтүшүнүн зарыл жана жетиштүү шарттары** (10.1-сүрөт, а) чийме):

$$O \in d \Leftrightarrow C = 0$$

$$d : Ax + By = 0.$$

2. **Түз сызыктын (Ox) огуна параллель болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары** (10.1-сүрөт, б) чийме):

$$d \parallel (Ox) \Leftrightarrow A = 0 \ \ (B \neq 0)$$

$$d : By + C = 0 \ \ же \ \ d : y = -\frac{C}{B}.$$

3. **Түз сызыктын (Oy) огуна параллель болушунун зарыл**

жана жетиштүү шарттары (10.1-сүрөт, в) чийме):

$$d \parallel (Oy) \Leftrightarrow B \neq 0 \;\; (A \neq 0)$$

$$d : Ax + C = 0 \;\; же \;\; d : x = -\frac{C}{A}.$$

4. **Түз сызыктын (*Ox*) огу менен дал келишинин зарыл жана жетиштүү шарттары:**

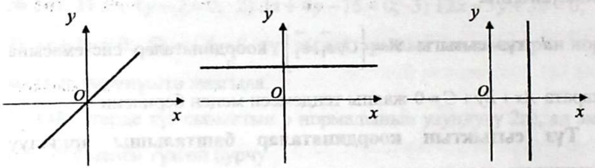
$$d \equiv (Ox) \Leftrightarrow A = C = 0$$

$$By = 0 \;\; же \;\; y = 0.$$

5. **Түз сызыктын (*Oy*) огу менен дал келишинин зарыл жана жетиштүү шарттары:**

$$d \equiv (Oy) \Leftrightarrow B = C = 0$$

$$Ax = 0 \;\; же \;\; x = 0.$$



а) б) в)

10.1-сүрөт

II. Эки түз сызыктын өз ара жайланышы

$\Re = \left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$ координаталар системасына карата

$$d_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{10.1}$$

$$d_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{10.2}$$

түз сызыктары берилсин.

1) Эки түз сызыктын параллель болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

2) Эки түз сызыктын дал келишинин зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

3) Эки түз сызыктын жалпы чекитке ээ болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

а) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$,

б) Эки түз сызыктын перпендикуляр болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Эгерде d_1 жана d_2 түз сызыктары тиешелүү түрдө $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ теңдемелери менен берилсе, жогорудагы шарттар тиешелүү түрдө:

1) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$; **2)** $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$ болот.

Мисал 10.1. $2x + 3y - 1 = 0$ жана $x - 2y + 5 = 0$ түз сызыктарынын өз ара жайланышын аныктагыла. Эгерде кесилишсе, кесилиш чекиттин координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}$ болгондуктан, бул эки түз сызык кесилишет. Кесилиш чекитти табалы. Ал үчүн

$$\begin{cases} 2x+3y-1=0, \\ x-2y+5=0 \end{cases}$$

системасынын чечебиз. Мында $x=-\frac{13}{7}$, $y=\frac{11}{7}$. Демек, берилген түз сызыктар $\left(-\frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$ чекитинде кесилишет.

III. Түз сызыктардын боосу

Аныктоо 10.1. Тегиздикте M_0 чекитинде кесилишкен түз сызыктардын тобу кесилишүүчү түз сызыктардын **боосу** деп аталат. Мында M_0 – боонун борбору.

Эгерде кандайдыр бир декарттык координаталар системасында борбору $M_0(x_0, y_0)$ чекити болгон боо берилсе, анда боо

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)=0 \qquad (10.3)$$

теңдемеси менен аныкталат. Мында α, β – бир учурда нөл эмес чыныгы сандар.

Эгерде кандайдыр бир декарттык координаталар системасында кесилишкен түз сызыктардын боосу (10.1), (10.2) теңдемелери менен аныкталган эки түз сызык менен берилсе, анда

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad (10.4)$$

теңдемеси берилген боону аныктайт.

Эгерде кандайдыр бир декарттык координаталар системасында $\vec{p}(p_1, p_2)$ векторуна параллель түз сызыктардын боосу берилсе, анда

$$p_2x - p_1x + \alpha = 0 \qquad (10.5)$$

теңдемеси берилген боону аныктайт.

Теорема 10.1. $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ теңдемелери менен берилген түз сызыктар кесилишүүчү же параллель түз сызыктардын боосуна таандык болушу үчүн

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (10.6)$$

шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү.

Мисал 10.2. $2x - 3y - 1 = 0$ жана $3x - y - 2 = 0$ түз сызыктарынын кесилиш чекити аркылуу өткөн, $y = x$ түз сызыгына перпендикуляр болгон түз сызыкты тапкыла.

Чыгаруу. (10.4) боюнча изделүүчү түз сызыктын теңдемесин

$$2x - 3y - 1 + \lambda(3x - y - 2) = 0 \text{ же}$$
$$(2 + 3\lambda)x + (-3 - \lambda)y - 1 - 2\lambda = 0 \qquad (10.7)$$

көрүнүшүндө жазууга болот, мында $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Акыркы теңдеме менен аныкталган түз сызыктын бурчтук коэффициенти

$$k = \frac{2 + 3\lambda}{3 + \lambda}$$

болот. Изделүүчү түз сызык $y = x$ түз сызыгына перпендикуляр болгондуктан, эки түз сызыктын перпендикуляр болуу шарты боюнча $k=-1$ болот. Анда

$$-1=\frac{2+3\lambda}{3+\lambda}.$$

Мындан $\lambda=-\frac{5}{4}$ келип чыгат. Табылган маанини (10.7) теңдемеге коюу менен изделүүчү түз сызыктын теңдемесине ээ болобуз:

$$7x+7y-6=0.$$

№ 153. **Төмөнкү түз сызыктар координаталар системасына карата кандайча жайланышкан?**

1) $x+5y=0$; **2)** $2x-3y-6=0$; **3)** $x-7=0$;

4) $3y-5=0$; **5)** $5x=0$; **6)** $-3y=0$.

№ 154. $2x-3y-12=0$ түз сызыгынын координата октору менен кесилиш чекиттерин тапкыла жана бул түз сызыкты түзгүлө.

№ 155. Төмөнкү түз сызыктар өз ара кандай жайланышкан? Эгерде кесилишсе, кесилиш чекиттин координаталарын тапкыла:

1) $x-y-11=0$ жана $2x-y+9=0$;

2) $5x-3y-15=0$ жана $10x-6y-31=0$?

№ 156.

1) $3x-y-1=0$, $2x-y+3=0$, $x-y+7=0$;

2) $5x-3y-15=0$, $x+5y-3=0$, $3x+y+5=0$

түз сызыктары бир чекит аркылуу өтүшөбү?

№ 157. $A(0,1)$ чекити аркылуу өткөн l түз сызыгынын, $x-3y+10=0$ жана $2x+y-8=0$ түз сызыктарында камалган кесиндиси А чекити тең экиге бөлүнөт l түз сызыкты тапкыла.

№ 158. $A(2,3)$ жана $B(5,-1)$ чекиттери

1) $x-3y-5=0$ жана $2x+9y-2=0$;

2) $12x+y-1=0$ жана $13x+2y-5=0$;

3) $2x+7y-5=0$ жана $x+3y+7=0$

түз сызыктарынан пайда болгон бир эле вертикалдык же бир эле жандаш бурчтарга таандык болушабы?

№ 159. ABC үч бурчтугунун AB, BC жана AC жактары тиешелеш түрдө $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$ теңдемелери менен берилген. Үч бурчтуктун чокуларынын координаталарын тапкыла.

№ 160. Параллелограммдын эки жагы $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ теңдемелери менен, ал эми диагоналдарынын бири $3x+2y+3=0$ теңдемеси менен берилген. Параллелограммдын чокуларынын координаталарын тапкыла.

№ 161. A(-4, 2), B(2, -5) жана C(5, 0) чокулуу үч бурчтуктун медианаларынын жана бийиктиктеринин кесилиш чекиттерин тапкыла.

№ 162. Түз сызыктардын $\alpha(2x+3y-1)+\beta(x-2y-4)=0$ теңдемеси менен берилген боосунун борборун тапкыла.

№ 163. $\alpha(x+2y-5)+\beta(3x-2y+1)=0$ боосуна таандык болгон жана

1) $A(3,-1)$ чекити аркылуу өткөн;

2) абсцисса огуна параллель болгон;

3) ордината огуна параллель болгон;

4) $4x+3y+5=0$ түз сызыгына параллель болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 164. Бир учурда

$$\alpha(x+y-1)+\beta(x-1)=0 \text{ жана } \alpha(2x-3y)+\beta(y+1)=0$$

боолоруна таандык болгон түз сызыктын теңдемесин тапкыла.

№ 165. Четки чекиттери $(-5,1)$ жана $(3,7)$ болгон кесиндини $2x+y+3=0$ түз сызыгы кесип өтөбү?

№ 166. mдин кандай маанисинде $(m-1)x+my-5=0$ жана $mx+(2m-1)y+7=0$ түз сызыктары абсциссада жаткан чекит аркылуу кесилишет?

№ 167. p нын кандай маанисинде $2x-y+3=0$, $x+y+3=0$ жана $px+y-13=0$ түз сызыктары бир чекитте кесилишет?

№ 168. $\alpha(5x+3y+6)+\beta(3x-4y-37)=0$ боосуна $7x+2y-15=0$ түз сызыгынын таандык эмес экендигин көрсөткүлө.

№ 169. $(3,2)$ чекити жактары $x+y-4=0$, $3x-7y+8=0$ жана $4x-y-31=0$ теңдемелери менен берилген үч бурчтукка карата ички же сырткы чекит болушун аныктагыла.

§11. Чекиттен түз сызыкка чейинки аралык. Эки түз сызыктын арасындагы бурч

I. Чекиттен түз сызыкка чейинки аралык

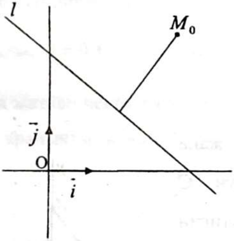
$\Re=\{O,\bar{i},\bar{j}\}$ тик бурчтуу координаталар системасына карата $M_0(x_0,y_0)$ чекити жана l түз сызыгы $Ax+By+C=0$ теңдемеси менен берилсин.

Аныктоо 11.1. M_0 чекитинен l түз сызыгына түшүрүлгөн перпендикулярдын узундугу **M_0 чекитинен l түз сызыгына чейинки аралык** деп аталат.

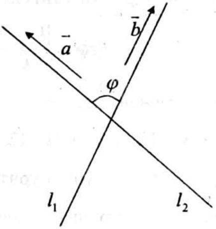
$M_0(x_0, y_0)$ чекитинен $Ax+By+C=0$ түз сызыгына чейинки аралык

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{11.1}$$

формуласы менен табылат, мында M_0 – берилген түз сызыкта жатпаган чекит (11.1-сүрөт).



11.1-сүрөт



11.2-сүрөт

II. Эки түз сызыктын арасындагы бурч

Аныктоо 11.2. l_1 жана l_2 түз сызыктарынын арасындагы **бурч** деп, алардын тиешелеш түрдө $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ багыттоочу векторлорунун арасындагы бурч аталат (11.2-сүрөт).

$$\varphi = \left(l_1 \,\hat{,}\, l_2\right) = \left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right).$$

Эгерде тик бурчтуу координаталар системасына карата l_1 жана l_2 түз сызыктары тиешелеш түрдө $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ жана $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ жалпы теңдемелери менен берилишсе, анда **эки түз сызыктын арасындагы бурчтун косинусу**

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{11.2}$$

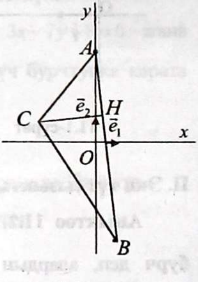
формуласы менен табылат.

Эгерде түз сызыктар $y = k_1x + b_1$ жана $y = k_2x + b_2$ теңдемелери менен берилишсе, анда бул **эки түз сызыктын арасындагы бурчтун тангенси**

$$tg\varphi = \frac{\left|k_2 - k_1\right|}{1 + k_1 \cdot k_2} \tag{11.3}$$

формуласы менен табылат.

Мисал 11.1. $A(0,4)$, $B(2,-4)$ жана $C(-2,1)$ чокулуу үч бурчтуктун С чокусунан түшүрүлгөн бийиктигин тапкыла (11.3-сүрөт).



11.3-сүрөт

Чыгаруу. **С** чокусунан АВ негизине түшүрүлгөн бийиктиктин негизин Н аркылуу белгилейли. Анда СН бийиктигинин узундугу С чекитинен (AB) түз сызыгына чейинки аралыкка барабар болот. (AB) түз сызыгынын теңдемесин (9.6) боюнча табалы:

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-4}{-4-4}\Rightarrow 8x+2y-8=0\Rightarrow 4x+y-4=0.$$

$$d=|CH|=\frac{|4\cdot(-2)+1\cdot 1-4|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{11}{\sqrt{17}}.$$

Мисал 11.2. $Ax+By+C_1=0$, $Ax+By+C_2=0$ параллель түз сызыктарынын арасындагы аралыкты тапкыла.

Чыгаруу. Эки параллель түз сызыктын арасындагы аралыкты табуу үчүн алардын каалаган бирөөндө жаткан чекиттен экинчисине чейинки аралыкты (11.1) формуласынын жардамында табуу жетиштүү. Түз сызыктардын теңдемелериндеги A, B коэффициенттеринин жок дегенде бирөө нөлдөн айырмалуу болот. Мисалы, $A\neq 0$ болсун. Анда $M\left(-\frac{C_1}{A},\,0\right)$ чекити биринчи түз сызыкта жаткан чекит болот. Бул чекиттен экинчи түз сызыкка чейинки аралыкты табалы:

$$d=\frac{|-C_1+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{11.4}$$

Ошентип, (11.4) параллель эки түз сызыктын арасындагы аралыкты табуу формуласы болот.

Мисал 11.3. Өз ара кесилишүүчү жана перпендикуляр болбогон $A_1x+B_1y+C_1=0$ жана $A_2x+B_2y+C_2=0$ түз сызыктары берилген. Кесилишүүдөн пайда болгон тар бурчтун биссектрисасынын теңдемесин тапкыла.

Чыгаруу. Кесилишүүчү түз сызыктардан бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин көптүгү – бул түз сызыктардын кесилишинен түзүлгөн бурчтун биссектрисалары болот. $M(x,y)$ – берилген түз сызыктар кесилишкенде пайда болгон тар бурчтун биссектрисасында жаткан чекит болсун. Анда (11.1) боюнча

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

$M(x,y)$ тар бурчта жатса,

$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)<0$ орун алат.

Эгерде $A_1A_2+B_1B_2>0$ болсо, анда $A_1x+B_1y+C_1$ жана $A_2x+B_2y+C_2$ сандары ар түрдүү белгиде болот. Ошондуктан бул учурда тар бурчтун биссектрисасынын теңдемеси

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$ көрүнүшүндө болот.

Эгерде $A_1A_2+B_1B_2<0$ болсо, анда $A_1x+B_1y+C_1$ жана $A_2x+B_2y+C_2$ сандары бирдей белгиде болот. Ал эми бул учурда тар бурчтун биссектрисасынын теңдемеси

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$ болот.

Мисал 11.4. $\begin{cases}x=1+2t,\\ y=2-t\end{cases}$ түз сызыгы менен $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}$ түз сызыгынын арасындагы бурчту тапкыла.

Чыгаруу. Берилген түз сызыктардын жалпы теңдемелери тиешелеш түрдө төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$x+2y-5=0,\ 2x-y-3=0.$$

(11.2) формуланы пайдаланалы:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{0}{5} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^0.$$

Демек, берилген эки түз сызык перпендикуляр экен.

№ 170. $(2,-1)$ чекитинен $3x+4y+7=0$ түз сызыгына чейинки аралыкты тапкыла.

№ 171. $3x-4y-10=0$ жана $6x-8y+5=0$ параллель түз сызыктарынын арасындагы аралыкты тапкыла.

№ 172. $3x-4y-10=0$ түз сызыгына параллель болуп, андан $d=3$ аралыкта жайланышкан түз сызыктын теңдемесин тапкыла.

№ 173. $M(-2{,}5)$ жана $N(0{,}1)$ чекиттеринен бирдей алыстатылган $x+2y-1=0$ түз сызыгындагы чекитти тапкыла.

№ 174. $P(7{,}1)$ жана $Q(-3{,}3)$ чекиттеринен бирдей алыстатылган (Ox) жана (Oy) окторундагы чекиттерди тапкыла.

№ 175. Жактары $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$ жана $7x+y+19=0$ теңдемелери менен берилген үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

№ 176. Квадраттын эки жагы $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$ түз сызыктарында жатат. Квадраттын аянтын тапкыла.

№ 177. $3x-4y-12=0$ түз сызыгы менен координаттык октордун арасында камалган үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

№ 178. Бир жагы $x-2y-7=0$ түз сызыгында жаткан квадраттын бир чокусу $A(2,-5)$ чекитинде жайланышкан. Квадраттын аянтын тапкыла.

№ 179. $5x-2y-1=0$ түз сызыгы $5x-2y+7=0$ жана

$5x-2y-9=0$ түз сызыктарына параллель болуп алардан бирдей алыстыкта жатаарын далилдегиле.

№ 180. $10x+15y-3=0$, $2x+3y+5=0$ жана $2x+3y-9=0$ параллель түз сызыктары берилген. Биринчи түз сызыктын калган экөөнүн арасында жатаарын далилдегиле жана анын экинчи жана үчүнчү түз сызыктардын арасындагы аралыкты кандай катышта бөлөөрүн аныктагыла.

№ 181. $A(-10,-13)$, $B(-2,3)$ жана $C(2,1)$ чокулуу үч бурчтуктун C чокусунан жүргүзүлгөн медианасына В чокусунан перпендикуляр түшүрүлгөн. Бул перпендикулярдын узундугун тапкыла.

№ 182. Түз сызыктардын $\alpha(2x+y+4)+\beta(x-2y-3)=0$ боосу берилген. Бул боонун түз сызыктарынын арасынан $(2,-3)$ чекитинен $\sqrt{10}$ аралыкта турган бир гана түз сызык бар экендигин көрсөткүлө жана анын теңдемесин жазгыла.

№ 183. $2x-9y+18=0$ жана $6x+7y-21=0$ түз сызыктарынын кесилишинен түзүлгөн бурчтун биссектрисаларынын теңдемелерин жазгыла.

№ 184. $3x-y-4=0$ жана $2x+6y+3=0$ түз сызыктарынын кесилишинен түзүлгөн бурчтун координата башталышы аркылуу өткөн биссектрисасынын теңдемесин жазгыла.

№ 185. $3x+4y-5=0$ жана $5x-12y+3=0$ түз сызыктарынын кесилишинен түзүлгөн тар бурчтун биссектрисасынын теңдемесин жазгыла.

№ 186. $x-3y+5=0$ жана $3x-y+15=0$ түз сызыктарынын кесилишинен түзүлгөн кең бурчтун биссектрисасынын теңдемесин жазгыла.

№ 187. $B(1,2)$ чекитинен чейинки аралыгы 5ке барабар болгон $(2,7)$ чекити аркылуу өткөн эки түз сызыкты жүргүзүүгө боло-орун көрсөткүлө.

№ 188. $(1,-4)$ чекитине карата $3x-5y+11=0$ түз сызыгына симметриялуу болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 189. $(5,-2)$ чекитине карата $\begin{cases} x=2+7t, \\ y=-5-4t \end{cases}$ түз сызыгына симметриялуу болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 190. $(3,3)$ жана $(5,2)$ чекиттеринен бирдей алыстыкта жаткан, $(1,2)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 191. $(-5,2)$ чекитинен $4x-y+3=0$ түз сызыгына түшүрүлгөн перпендикулярдын теңдемесин жазгыла.

№ 192. Үч бурчтуктун жактары $2x-y-3=0$, $x+5y-7=0$ жана $3x-2y+6=0$ теңдемелери менен берилсе, анда анын бийиктиктеринин теңдемелерин жана узундуктарын тапкыла.

№ 193. **1)** $3x-y=0$ жана $2x+y-5=0$; **2)** $4x-y-7=0$ жана $x+4y-8=0$ түз сызыктарынын арасындагы бурчту тапкыла.

№ 194. 1) $x+y-7=0$; **2)** $x-y+2=0$; **3)** $x+\sqrt{3}y-4=0$ түз сызыгы менен (Ox) огунун арасындагы бурчту тапкыла.

№ 195. Жактары $x+y=4$, $3x-y=0$, $x-3y-8=0$ теңдемелери менен берилген үч бурчтукту тургузгула, ички бурчтарын жана үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

№ 196.

1) $(-2,4)$ чекитинин $2x-3y-8=0$ түз сызыгындагы ортогоналдуу проекциясын тапкыла;

2) $(-1,3)$ чекитинин $\begin{cases} x=2+t, \\ y=-4t \end{cases}$ түз сызыгындагы ортогоналдуу проекциясын тапкыла.

V. Мейкиндиктеги тегиздиктер жана түз сызыктар

§12. Тегиздиктин түрдүүчө берилиш жолдору

I. Тегиздиктин параметрдик теңдемелери

Π – тегиздик болсун.

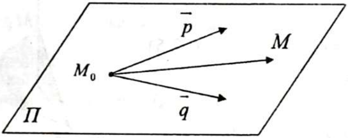
$M_0 \in \Pi$ – баштапкы чекит, $\Pi \parallel \vec{p}$, $\Pi \parallel \vec{q}$, $\vec{p}$ жана $\vec{q}$ өз ара коллинеардуу эмес векторлор болсун. (12.1-сүрөт).

$\Pi = (M_0, \vec{p}, \vec{q})$ – M_0 чекити аркылуу өткөн жана $\vec{p}$, $\vec{q}$ векторлоруна параллель болгон тегиздиктин теңдемеси төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\overline{MM_0} = \alpha\vec{p} + \beta\bar{q}, \quad \alpha, \beta \in R. \tag{12.1}$$

(12.1) теңдемеси тегиздиктин **вектордук көрүнүштөгү параметрдик теңдемеси** деп аталат.

Мында M тегиздиктеги каалагандай чекит.



12.1-сүрөт

$\Re = \left\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ координаталар системасына карата $M_0(x_0, y_0, z_0)$ чекити, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ жана $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$

векторлору берилсин. Анда (12.1) теңдеме төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$x=\alpha\, p_1+\beta\, q_1+x_0,\ y=\alpha\, p_2+\beta\, q_2+y_0,\ z=\alpha\, p_3+\beta\, q_3+z_0. \quad (12.2)$$

(12.2) – тегиздиктиң **координаталык көрүнүштөгү параметрдик теңдемелери** деп аталат.

(12.2)ни төмөндөгүдөй да жазууга болот:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}=0. \quad (12.3)$$

1. Коллинеардуу эмес (бир түз сызыкта жатпаган) $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ **үч чекити аркылуу өткөн тегиздиктин теңдемеси:**

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \quad (12.4)$$

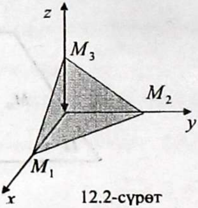
2. Тегиздиктин кесиндилердеги теңдемеси:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad (12.5)$$

мында

$M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$.

(12.2- сүрөт).



12.2-сүрөт

3. Тегиздиктин жалпы теңдемеси:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (12.6)$$

$A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Аныктоо 12.1. Π тегиздигине перпендикуляр болгон $\vec{n}$ вектору тегиздиктин **нормаль** вектору деп аталат, б.а. $\Pi \perp \vec{n}$.

Тегиздик жалпы теңдемеси менен берилсе, $\bar{n} = (A, B, C)$ болот.

4. Чекити жана нормаль вектору берилген тегиздиктин теңдемеси.

$\vec{n}(A,B,C)$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $\Pi \perp \vec{n}$, $M_0 \in \Pi$ болсун. Анда бул учурда тегиздик төмөнкү теңдеме менен аныкталат:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (12.7)$$

5. Тегиздиктин нормалдык теңдемеси:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\chi - \rho = 0 \qquad (12.8)$$

ρ – координата баштальшынан тегиздикке чейинки аралык.

$\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\chi)$, $\vec{n}_0$ – бирдик нормаль вектор.

Мисал. 12.1. $M_1(1,2,3)$, $M_2(2,-1,3)$ чекиттери аркылуу өтүп, $x+2y+2z-5=0$ теңдемеси менен берилген Π_1 тегиздигине перпендикуляр болгон Π_2 тегиздигинин теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. Берилген Π_1 тегиздиги менен изделүүчү Π_2 тегиздиги перпендикуляр болгондуктан, Π_1 тегиздигинин $\bar{n}(1,2,2)$ нормаль вектору Π_2 тегиздигине параллель болот. Анда Π_2 тегиздигинин теңдемесин

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (12.9)$$

формуласынан табабыз:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Мындан $П_2$ тегиздигинин $6x+2y-5z+5=0$ теңдемесине ээ болобуз.

Мисал 12.2. $6x-2y+3z+21=0$ тегиздигинин теңдемесин нормалдык көрүнүшкө алып келгиле.

Чыгаруу. Тегиздиктин (12.6) жалпы теңдемесин (12.8) нормалдык көрүнүшүнө алып келүү үчүн (12.6)нын ар бир мүчөсүн

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{12.10}$$

нормаланган көбөйтүүчүгө көбөйтүү керек. Мында тамыр алдындагы белги бош мүчө Dнын белгисине карама-каршы алынат.

D=21>0 болгондуктан $\mu < 0$ болот. Анда

$$\mu = \frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -\frac{1}{\sqrt{36+4+9}} = -\frac{1}{7}.$$

Берилген тегиздиктин теңдемесинин ар бир мүчөсүн $\left(-\frac{1}{7}\right)$ге көбөйтүп, тегиздиктин нормалдык теңдемесине ээ болобуз:

$$-\frac{6}{7}x + \frac{2}{7}x - \frac{3}{7}x - 3 = 0 .$$

Мисал 12.3. $M(6,8,10)$ чекити аркылуу өтүп, координата окторун барабар кесиндилерде кесип өткөн тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. Тегиздик координата окторун барабар кесиндилерде кесип өткөндүктөн, $a=b=c$ болот. (12.5) боюнча

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1.$$

Берилген M чекитинин координаталары

$$\frac{6}{a}+\frac{8}{a}+\frac{10}{a}=1$$

теңдемесин канааттандырышат. Мындан $a = 24$ экендиги келип чыгат. Тегиздиктин теңдемеси $\frac{x}{24}+\frac{y}{24}+\frac{z}{24}=1$ же $x+y+z=24$ болот.

Мисал 12.4. $M(4,-3,1)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{a}=-3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ векторуна перпендикуляр болгон тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. Тегиздик $\vec{a}$ векторуна перпендикуляр болгондуктан, $\vec{a}$ векторун тегиздиктин нормаль вектору $\vec{n}(A,B,C)$ катары алууга болот. Анда $A=-3, B=4, C=1$ болот. (12.7) формуланы пайдаланып, тегиздиктин

$$-3(x-4)+4(y+3)+1(z-1)=0 \text{ же } 3x-4y-z+23=0$$

теңдемесине ээ болобуз.

№ 197. $2x-5y+7z-2=0$ тегиздигинде жаткан бир нече чекитти көрсөткүлө.

№ 198. $M(-4,3,2), N(0,4,5), P(-1,3,0)$ жана $Q(0,-1,3)$ чекиттеринин кайсылары $3x-2y+5z-17=0$ тегиздигинде жатат?

№ 199. Абсциссасы -2, 4, 0, 1 болгон, (xOz) жана $x+4y-z+5=0$ тегиздиктеринде жаткан чекиттердин координаталарын тапкыла.

№ 200. **1)** $(3,1,0),(0,1,2),(-1,0,-5),(4,1,5)$;

2) $(2,1,-1),(1,-1,2),(0,4,-2),(3,1,-2)$;

3) $(0,0,-1),(1,3,4),(5,0,-3),(4,4,1)$;

4) $(0,0,2),(0,0,5),(1,1,0),(4,1,2)$

чекиттери бир тегиздикте жатышабы?

№ 201. **1)** $2x-y+3z-6=0$; **2)** $5x+2y+5z-10=0$;

3) $x-2y+4z+4=0$; **4)** $x+y+z+2=0$

тегиздиги менен координата окторунун кесилиш чекиттерин тапкыла, кесиндилердеги теңдемесин, нормаль теңдемесин жазгыла.

№ 202. **1)** $A(3,4,-5)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{a}(3,1,-1)$ жана $\vec{b}(1,-2,1)$ векторлоруна параллель болгон;

2) $A(0,0,1)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{a}(2,1,5)$ жана $\vec{b}(1,0,1)$ векторлоруна параллель болгон тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

№ 203. **1)** $A(2,-1,3)$ жана $B(3,1,2)$ чекиттери аркылуу өтүп, $\vec{a}(3,-1,4)$ векторуна параллель болгон;

2) $A(-1,0,0)$ жана $B(0,0,1)$ чекиттери аркылуу өтүп, $\vec{a}(2,1,2)$ векторуна параллель болгон;

№ 204. 1) $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$, $C(2,0,2)$;

2) $A(1,2,3)$, $B(2,1,3)$, $C(0,-1,2)$ чекиттери аркылуу өткөн тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

№ 205. 1) (Oz) огуна параллель болуп, (Ox) огун узундугу $a=3$, (Oy) огун узундугу $b=|-4|$ кесиндилеринде кесип өткөн;

2) (Ox) огуна параллель болуп, (Oy) жана (Oz) окторун узундуктары $a=b=4$ кесиндилеринде кесип өткөн тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

№ 206. 1) $x+5y-z-2=0$; **2)** $4x-3y+5z-1=0$;

3) $x+2y-7=0$; **4)** $-2x+5=0$

тегиздиктеринин нормаль векторунун координаталарынын тапкыла.

№ 207. 1) Координата башталышы аркылуу өтүп, $\vec{n}=-3\vec{j}+4\vec{k}$ векторуна перпендикуляр болгон;

2) $M(-2,1,3)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{n}=-4\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ векторуна перпендикуляр болгон тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

№ 208. 1) $U(1,-1,-2)$ жана $V(3,1,1)$ чекиттери аркылуу өтүп, $2x-4y+6z-15=0$ тегиздигине перпендикуляр болгон;

2) $P(1,-1,3)$, $Q(1,2,4)$ чекиттери аркылуу өтүп, $2x-3y+z+1=0$ тегиздигине перпендикуляр болгон тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

№ 209. 1) Координата башталышы аркылуу өтүп, $2x-y+3z-1=0$ жана $x+2y+z=0$ тегиздиктерине перпендикуляр болгон;

2) $A(-1,0,2)$ чекити аркылуу өтүп, $x+y-5z+1=0$ жана $2x+3y-1=0$ тегиздиктерине перпендикуляр болгон тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

§13. Тегиздиктин координаталар системасына карата жайланышы. Эки тегиздиктин өз ара жайланышы. Тегиздиктердин боосу жана байламтасы

I. Тегиздиктин координаталар системасына карата жайланышы

$\Re=\left\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}$ координаталар системасына карата П тегиздиги $Ax+By+Cz+D=0$ теңдемеси менен берилсин.

1. Тегиздиктин координаталар башталышы аркылуу өтүшүнүн зарыл жана жетиштүү шарттары:

$D=0,\ Ax+By+Cz=0;$

2. Тегиздиктин (Ox) огуна параллель болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$A=0,\ By+Cz+D=0;$

3. Тегиздиктин (Ox) огу аркылуу өтүшүнүн зарыл жана жетиштүү шарттары:

$A=D=0,\ By+Cz=0;$

4. Тегиздиктин (Oy) огуна параллель болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$B = 0,\ Ax + Cz + D = 0;$

5. Тегиздиктин (Oy) огу аркылуу өтүшүнүн зарыл жана жетиштүү шарттары:

$B = D = 0,\ Ax + Cz = 0;$

6. Тегиздиктин (Oz) огуна параллель болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$C = 0,\ Ax + By + D = 0;$

7. Тегиздиктин (Oz) огу аркылуу өтүшүнүн зарыл жана жетиштүү шарттары:

$C = D = 0,\ Ax + By = 0;$

8. Тегиздиктин (Oxy) тегиздигине параллель болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$A = B = 0,\ Cz + D = 0;$

9. Тегиздиктин (Oxy) тегиздигине дал келишинин зарыл жана жетиштүү шарттары:

$A = B = D = 0,\quad z = 0;$

10. Тегиздиктин (Oxz) тегиздигине параллель болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$A = C = 0,\ By + D = 0;$

11. Тегиздиктин (Oxz) тегиздигине дал келишинин зарыл жана жетиштүү шарттары:

$A = C = D = 0,\quad y = 0;$

12. Тегиздиктин (Oyz) тегиздигине параллель болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$B = C = 0, \ Ax + D = 0;$$

13. Тегиздиктин (Oyz) тегиздигине дал келишинин зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$B = C = D = 0, \ \ x = 0.$$

II. Эки тегиздиктин өз ара жайланышы

$\Re = \left\{ O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \right\}$ координаталар системасына карата

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (13.1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (13.2)$$

теңдемелери менен тиешелеш түрдө Π_1 жана Π_2 тегиздиктери берилсин.

1) Эки тегиздиктин параллель болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

2) Эки тегиздиктин дал келишинин зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

3) Эки тегиздиктин кесилишинин зарыл жана жетиштүү шарттары:

а) же $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, же $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, же $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

б) Эки тегиздиктин перпендикуляр болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

III. Тегиздиктердин боосу

Аныктоо 13.1. Бир l түз сызыгын кармоочу мейкиндиктеги тегиздиктердин көптүгү **кесилишүүчү тегиздиктердин боосу** деп аталат.

Аныктоо 13.2. Мейкиндикте өз ара параллель тегиздиктердин көптүгү **параллель тегиздиктердин боосу** деп аталат.

Тегиздиктердин боосунун теңдемеси:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \qquad (13.3)$$

$\alpha A_1 + \beta A_2$, $\alpha B_1 + \beta B_2$, $\alpha C_1 + \beta C_2$ – бир учурда нөл эмес сандар.

Мисал 13.1. $M(2,-1,3)$ чекити жана $2x+3y-z+4=0$, $x-2y-3z+6=0$ тегиздиктеринин кесилишинен пайда болгон түз сызык аркылуу өткөн тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. Берилген тегиздиктердин кесилиши аркылуу өткөн тегиздиктердин боосунун

$$\alpha(2x+3y-z+4)+\beta(x-2y-3z+6)=0 \qquad (13.4)$$

теңдемесин түзөлү. M чекити изделүүчү тегиздикте жаткандыктан, анын координаталары (13.4) теңдемесин канааттандырышат:

$\alpha(2\cdot 2+3(-1)-3+4)+\beta(2-2(-1)-3\cdot 3+6)=0$ же

$2\alpha+\beta=0$. Мындан $\beta=-2\alpha$ келип чыгат. βнын бул маанисин (13.4) теңдемесине алып барып коңлу:

$$\alpha(2x+3y-z+4)-2\alpha(x-2y-3z+6)=0.$$

Бул барабардыктын эки жагын тең αга бөлүп жиберип, жөнөкөйлөтүп, изделүүчү тегиздиктен

$$7y+5z-8=0$$

теңдемесине ээ болобуз.

№ 210. **1)** $x-2y+4z-12=0$; **2)** $3x-5z+4=0$;

3) $2x-2y+3z=0$; **4)** $x+2y-7=0$;

5) $3x+5y=0$; **6)** $2y-3z=0$;

7) $x+z-3=0$; **8)** $6x-1=0$;

9) $y+4=0$; **10)** $3x=0$.

тегиздиктери координаталар системасына карата кандайча жайланышкан? Тегиздиктерди түзгүлө.

№ 211. **1)** $2x+3y+4z-12=0$; $3x-6y+1=0$;

2) $3x-4y+6z+9=0$; $6x-8y-10z+15=0$;

3) $3x-2y-3z+5=0$; $9x-6y-9z-5=0$;

4) $x+y+z-1=0$; $2x+2y-2z+3=0$;

5) $2x-y-z-3=0$; $10x-5y-5z-15=0$

тегиздиктери өз ара кандайча жайланышкан?

№ 212. **1)** $2x+ly+3z-5=0$ жана $mx-6y-6z+2=0$;

2) $3x-y+lz-9=0$ жана $2x+my+2z-3=0$;

3) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$ жана $2x - 5y - lz = 0$

тегиздиктери l жана m дин кандай маанилеринде параллель болушат?

№ 213. l дин кандай маанисинде төмөнкү тегиздиктердин жубу перпендикуляр болушат:

1) $3x - 5y + lz - 11 = 0$ жана $x + 3y + 2z + 17 = 0$;

2) $5x + y - 3z - 16 = 0$ жана $2x + ly - 3z + 12 = 0$;

3) $7x - 2y - z - 1 = 0$ жана $lx + y - 3z = 0$?

№ 214. $A(-3,3,5)$, $B(0,-7,-4)$, $C(6,5,1)$, $D(-3,-5,2)$, $E(4,-7,10)$, $F(2,6,1)$ чекиттери $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ тегиздигине карата кандайча жайланышкан?

№ 215. $2x + 3y + 17z - 2 = 0$ тегиздиги (1, 4, -3) жана (2, 5, 0) чокулуу кесиндисин кесип өтөбү?

№ 216. **1)** P(3,-2,-7) чекити аркылуу өтүп, $4x - 6z + 19 = 0$ тегиздигине;

2) $M(3,-5,1)$ чекити аркылуу өтүп, $x - 2y + 4z = 0$ тегиздигине параллель болгон тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

3) K(2, -3, 3) чекити аркылуу өтүп, (xOy) тегиздигине параллель болгон;

4) H(1, -2, 4) чекити аркылуу өтүп, (xOz) тегиздигине параллель болгон;

5) Q(-5, 2, -1) чекити аркылуу өтүп, (yOz) тегиздигине параллель болгон тегиздиктин тендемесин жазгыла.

№ 217. **1)** (Ox) огу жана (4, -1, 2) чекити;

2) (Oy) огу жана (1, 4, -3) чекити;

3) (Oz) огу жана (3, -4, 7) чекити аркылуу өткөн тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

№ 218. **1)** (7, 2, -3) жана (5, 6, -4) чекиттери аркылуу өтүп, (Ox) огуна параллель;

2) (2, -1, 1) жана (3, 1, 2) чекиттери аркылуу өтүп, (Oy) огуна параллель;

3) (3, -2, 5) жана (2, 3, 1) чекиттери аркылуу өтүп, (Oz) огуна параллель болгон тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

№ 219. Координаталык тегиздиктер менен $2x-3y+4z+18=0$ тегиздигинин кесилишинен пайда болгон тетраэдрдин ичине бир чокусу координата башталышында жаткан куб сызылган. Кубдун бул чокусунан чыккан үч кыры координата окторун боюнча багытталган, ал эми бул чокуга карама-каршы жаткан чокусу берилген тегиздикте жатат. Кубдун кырынын узундугун тапкыла.

№ 220. $x-2y+z-7=0, 2x+y-z+2=0$ жана $x-3y+2z-11=0$ тегиздиктеринин бир чекитте кесилишээрин далилдегиле жана ал чекиттин координаталарын тапкыла.

№ 221. $7x+4y+7z+1=0$, $2x-y-z+2=0$ жана $x+2y+3z-1=0$ тегиздиктеринин бир түз сызык аркылуу өтөөрүн далилдегиле.

№ 222. $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$ жана $4x+3y+z+2=0$ тегиздиктеринин үч ар түрдүү түз сызык боюнча кесилишээрин далилдегиле.

№ 223. Тегиздиктердин $2x-3y+z-3+\chi(x+3y+2z+1)=0$

боосунан

1) (1, -2, 3) чекити аркылуу өткөн;

2) (Ox) огуна параллель;

3) (Oy) огуна параллель;

4) (Oz) огуна параллель болгон тегиздикти тапкыла.

№ 224. $5x-9y-2z+12=0$ тегиздиги $\alpha(2x-3y+z-5)+\beta(x-2y-z-7)=0$ боосуна таандык болобу?

№ 225. l жана m дин кандай маанилеринде $5x+ly+4z+m=0$ тегиздиги $\alpha(3x-7y+z-3)+\beta(x-9y-2z+5)=0$ боосуна таандык болот?

№ 226. l жана m дин кандай маанилеринде $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+m=0$ жана $x+ly-6z+10=0$ тегиздиктери

1) жалпы чекитке ээ болушат;

2) бир түз сызык боюнча кесилишет;

3) өз ара параллель болгон үч түз сызык боюнча кесилишет?

№ 227. μ *жана* ν параметринин кандай маанилеринде $2x+y-z+3=0$, $x-3y+5=0$ жана $\mu x+y-2z+\nu=0$ тегиздиктери бир боого таандык болот?

§14. Эки тегиздиктин арасындагы бурч. Чекиттен тегиздикке чейинки аралык

I. Эки тегиздиктин арасындагы бурч

Аныктоо 14.1. Эки тегиздик кесилишкенде пайда болгон каалаган эки грандыктын арасындагы бурчту берилген **эки тегиздиктин арасындагы бурч** деп айтабыз.

$\Re = \left\{ O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ координаталар системасына карата

$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ жана $\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ тегиздиктери берилсин, ал эми $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ векторлору тиешелеш түрдө бул тегиздиктердин нормаль векторлору болсун. Анда Π_1 жана Π_2 тегиздиктеринин арасындагы бурчтун косинусу төмөнкүгө барабар болот:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (14.1)$$

II. Чекиттен тегиздикке чейинки аралык

$\Re = \left\{ O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ координаталар системасына карата

$\Pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$ тегиздиги жана $M_0(x_0, y_0, z_0)$ чекити берилсин, мында $M_0 \notin \Pi$.

Аныктоо 14.1. M_0 чекитинен Π тегиздигине түшүрүлгөн перпендикулярдын узундугу M_0 чекитинен Π тегиздигине чейинки **аралык** деп аталат жана ал төмөнкүдөй табылат:

$$\rho(M_0, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (14.2)$$

Мисал 14.1. $\Pi_1: x + y - z + 1 = 0$ жана $\Pi_2: x - y + z - 5 = 0$ тегиздиктеринен бирдей алыстыкта жаткан (Oy) огундагы чекитти тапкыла.

Чыгаруу. Изделүүчү X чекити (Oy) огунда жаткандыктан, анын координаталары $(0, y_0, 0)$ болот. X чекитинен $П_1$ жана $П_2$ тегиздиктерине чейинки аралыктар барабар болгондуктан (14.2) формуласы боюнча төмөндөгүдөй барабардыкка ээ болобуз:

$$\frac{|y_0+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-y_0-5|}{\sqrt{3}}.$$

Мындан $y_0 = -3$ экендиги келип чыгат. Демек, изделүүчү X чекити $(0,-3,0)$ координаталарына ээ болот.

№ 228. Төмөнкү тегиздиктердин арасындагы бурчту тапкыла:

1) $4x-5y+3z-1=0$ жана $x-4-7+9=0$;

2) $3x-y+2z+15=0$ жана $5x+9y-3z-1=0$;

3) $6x+2y-4z+17=0$ жана $9x+3y-6z-4=0$;

4) $x-2y+5z-10=0$ жана $2x-y+z-1=0$.

№ 229. $x-y+\sqrt{2}z-5$ тегиздиги менен (yOz) тегиздигинин арасындагы бурчту тапкыла.

№ 230. $M(-5,16,12)$ чекити аркылуу эки тегиздик өтөт: бири (Ox) огун, экинчиси (Oy) огун кармайт.Бул эки тегиздиктин арасындагы бурчту тапкыла.

№ 231. $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ тегиздиги менен 60^0 түк бурчту түзгөн (Oz) огун кармаган тегиздиктин теңдемесин тапкыла.

№ 232. $2x-y+2z+9=0$ тегиздигине перпендикуляр болгон түз сызыктын багыттоочу косинустарын тапкыла.

№ 233. 1) Координата башталышынан $4x-3y+12z-78=0$ тегиздигине;

2). $M(3,2,-1)$ чекитинен $2x-3y+6z-3=0$ тегиздигине чейинки аралыкты тапкыла.

№ 234. Чокулары $A(1,2,-3)$, $B(1,0,-4)$, $C(-1,3,0)$, $D(0,3,-5)$ чекиттери болгон тетраэдрдин A чокусунан чыккан бийиктигин тапкыла.

№ 235. $2x+y-2z+33=0$ жана $2x+y-2z-22=0$ параллель тегиздиктеринин арасындагы аралыкты тапкыла.

№ 236. Координата башталышынан жана $x-2y+2z+15=0$ тегиздигинен бирдей алыстыкта жаткан (Oz) огундагы чекитти тапкыла.

№ 237. $6x+3y-2z+13=0$ тегиздигине параллель болуп, андан 7см алыстыкта турган тегиздикти тапкыла.

№ 238. $P(2,-1,3)$ жана $Q(4,5,-3)$ чекиттеринен бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин көптүгүн тапкыла.

№ 239. $6x+2y-9z+121=0$ тегиздигине карата координата башталышына симметриялуу болгон чекитти тапкыла.

№ 240. Координата башталышынан 6см алыстыкта турган тегиздик координата окторун $a:b:c=1:3:2$ катышында бөлө тургандай кесиндилерде кесип өтөт. Тегиздиктин теңдемесин тапкыла.

§15. Мейкиндиктеги түз сызыктар

I. Мейкиндиктеги түз сызыктын түрдүүчө берилиш жолдору

d – түз сызык, $M_0 \in d$ – түз сызыктын баштапкы чекити, ал эми $\vec{p}$ вектору бул түз сызыктын багыттоочу вектору болсун.

$\Re = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ координаталар системасына карата $M_0(x_0, y_0, z_0)$ чекити жана $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ вектору берилсин.

1. Түз сызыктын мейкиндиктеги каноникалык теңдемеси:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} z - z_0 & x - x_0 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (15.1)$$

же

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}. \quad (15.2)$$

$p_1 = \cos\alpha$, $p_2 = \cos\beta$, $p_3 = \cos\chi$ жана $|\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ болсун. Анда (15.2)ни төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\chi}.$$

Мында α, β, χ – түз сызыктын тиешелеш түрдө (Ox), (Oy), (Oz) координаталык октору менен түзгөн бурчу.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\chi$ – түз сызыктын **багыттоочу косинустары** деп аталышат жана төмөнкү формулалар менен табылат:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{p_1}{\left|\vec{p}\right|} = \dfrac{p_1}{\sqrt{p_1^{\,2} + p_2^{\,2} + p_3^{\,2}}}, \\ \cos\beta = \dfrac{p_2}{\left|\vec{p}\right|} = \dfrac{p_2}{\sqrt{p_1^{\,2} + p_2^{\,2} + p_3^{\,2}}}, \\ \cos\chi = \dfrac{p_3}{\left|\vec{p}\right|} = \dfrac{p_3}{\sqrt{p_1^{\,2} + p_2^{\,2} + p_3^{\,2}}}. \end{cases} \qquad (15.3)$$

2. Түз сызыктын мейкиндиктеги параметрдик теңдемелери:

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t, \\ y = y_0 + p_2 t, \quad t \in R. \\ z = z_0 + p_3 t. \end{cases} \qquad (15.4)$$

3. Эки чекит аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемеси:

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ жана $M_2(x_2, y_2, z_2)$ чекиттери берилсин.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y - y_1 & z - z_1 \\ y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z - z_1 & x - x_1 \\ z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (15.5)$$

же
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (15.6)$$

4. Эки тегиздиктин кесилишинен пайда болгон түз сызыктын теңдемеси:

$$d : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (15.7)$$

(15.7) – түз сызыктын мейкиндиктеги **жалпы теңдемеси** деп аталат.

$$d \parallel \vec{p},\ \vec{p} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}. \qquad (15.8)$$

II. Мейкиндикте эки түз сызыктын өз ара жайланышы

1. Эки түз сызыктын бир тегиздикте жатышынын зарыл жана жетиштүү шарттары:

$\Re = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ координаталар системасына карата $M_1(x_1, y_1, z_1)$ чекити аркылуу өтүп, $\bar{p}(p_1, p_2, p_3)$ векторуна параллель болгон l_1 түз сызыгы, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ чекити аркылуу өтүп, $\bar{q}(q_1, q_2, q_3)$ векторуна параллель болгон l_2 түз сызыгы берилсин.

l_1 жана l_2 түз сызыктары бир тегиздикте жатышы үчүн $\overline{M_1M_2}, \bar{p}$ жана $\bar{q}$ векторлорунун компланардуу болушу зарыл жана жетиштүү, б.а. $(\overline{M_1M_2}, \bar{p}, \bar{q}) = 0$ же координаталык көрүнүштө төмөндөгүдөй болот:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (15.9)$$

а) Эки түз сызыктын кесилишинин зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$\begin{cases} (\overline{M_1M_2}, \bar{p}, \bar{q}) = 0, \\ \bar{p},\ \bar{q} - \text{коллинеардуу эмес.} \end{cases} \qquad (15.10)$$

б) Эки түз сызыктын параллель болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$\begin{cases}\left(\overline{M_1M_2}, \bar{p}, \bar{q}\right)=0,\\ \bar{p}\parallel\bar{q}.\end{cases} \qquad (15.11)$$

в) Эки түз сызыктын дал келишинин зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$\begin{cases}\left(\overline{M_1M_2}, \bar{p}, \bar{q}\right)=0,\\ \overline{M_1M_2}\parallel\bar{p}\parallel\bar{q}.\end{cases} \qquad (15.12)$$

2. Эки түз сызыктын кайчылаш болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$\left(\overline{M_1M_2}, \bar{p}, \bar{q}\right)\neq 0. \qquad (15.13)$$

III. Эки түз сызыктын арасындагы бурч

$\Re=\left\{O,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right\}$ координаталар системасына карата тиешелеш түрдө багыттоочу векторлору $\bar{p}(p_1,p_2,p_3)$ жана $\bar{q}(q_1,q_2,q_3)$ болгон l_1 жана l_2 түз сызыктары берилсин.

l_1 жана l_2 түз сызыктарынын арасындагы бурчтун косинусу

$$\cos\alpha=\frac{p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}} \qquad (15.14)$$

формуласы менен табылат.

Мындан эки түз сызыктын мейкиндикте перпендикуляр болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары келип чыгат:

$$p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3=0. \qquad (15.15)$$

IV. Чекиттен түз сызыкка чейинки аралык

$\Re=\{O,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ координаталар системасына карата $M_1(x_1,y_1,z_1)$ чекити аркылуу өткөн, багыттоочу вектору $\bar{p}(p_1,p_2,p_3)$ болгон l түз сызыгы жана $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_0\notin d$ чекити берилсин. M_0 чекитинен l түз сызыгына чейинки аралык

$$d=\frac{\left\|\left[\overrightarrow{M_1M_0},\bar{p}\right]\right\|}{|\bar{p}|} \tag{15.16}$$

формуласы менен же координаталык көрүнүштө

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ p_2 & p_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}}}{\sqrt{p_1^{\,2}+p_2^{\,2}+p_3^{\,2}}} \tag{15.16*}$$

формуласы менен табылат.

V. Кайчылаш түз сызыктардын арасындагы аралык

l_1 жана l_2 кайчылаш түз сызыктар болсун.

Аныктоо. 15.1. l_1 жана l_2 кайчылаш түз сызыктардын жалпы перпендикулярынын узундугу бул түз сызыктардын арасындагы **аралык** деп аталат.

$\Re=\{O,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ координаталар системасына карата l_1 жана l_2 түз сызыктары $\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{p_2}=\frac{z-z_1}{p_3}$ жана $\frac{x-x_2}{q_1}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{q_3}$ теңдемелери менен берилсин.

l_1 жана l_2 кайчылаш түз сызыктарынын арасындагы аралык

$$d=\frac{\left|\left(\overline{M_1M_2},\bar{p},\bar{q}\right)\right|}{\left|\left[\bar{p},\bar{q}\right]\right|} \qquad (15.17)$$

формуласы менен же координаталык көрүнүштө

$$d=\frac{mod\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ q_3 & q_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}^2}} \qquad (15.17^*)$$

формуласы менен табылат.

Мисал 15.1. Мейкиндикте түз сызык төмөнкүдөй жалпы теңдемеси менен берилген:

$$\begin{cases} x-y+2z-3=0, \\ 2x+y-z+6=0. \end{cases} \qquad (15.18)$$

Бул түз сызыктын каноникалык теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. M_0 – баштапкы чекитинин координаталарын аныктайлы. Ал үчүн zке каалагандай маани берип, x_0, y_0дү табабыз. Мисалы, $z=0$ болсун, анда (15.18)дан $x_0=-1$, $y_0=-4$ экендигине ээ болобуз. Ошентип, M_0 чекити (-1, -4, 0) координаталарына ээ болот.

Берилген түз сызыктын багыттоочу векторунун координаталары (15.8) боюнча табылат:

$$\vec{p}=\left\{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right\}=\{-1;\ 5;\ 3\}.$$

Ошентип, берилген түз сызыктын каноникалык теңдемеси төмөнкүдөй көрүнүштө болот:

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+4}{5}=\frac{z}{3}.$$

Мисал 15.2. $x-3y+z=0,\ y=0$ теңдемеси менен берилген түз сызыктын параметрдик теңдемелерин жазгыла.

Чыгаруу. Алгач түз сызыктын баштапкы чекитинин координаталарын табабыз. Берилген түз сызыктын бардык чекиттери үчүн $y=0$. Берилген теңдемеде $z_0=1$ деп алсак, $x_0=-1$ экендигине ээ болобуз. Ошондуктан $M_0(\text{-}1{,}0{,}1)$ чекити берилген түз сызыкта жатат.

Берилген түз сызыктын багыттоочу векторун табалы:

$$\vec{p}=\left\{\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right\}=\{-1;\,0;\,1\}.$$

Анда түз сызыктын параметрдик теңдемелери төмөнкүчө болот:

$$x=-1-t,\ \ y=o,\ \ z=1+t.$$

Мисал 15.3. k нын кандай маанисинде $l_1:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$ жана $l_2:\dfrac{x-3}{k}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-7}{2}$ түз сызыктары кесилишет?

Чыгаруу. l_1 түз сызыгы $M_1(-2{,}0{,}1)$ чекити аркылуу өтүп, $\bar{p}(2,-3,4)$ векторуна параллель, ал эми l_2 түз сызыгы $M_2(3{,}1{,}7)$ чекити аркылуу өтүп, $\bar{q}(k,4,2)$ векторуна параллель. Алгач k нын кандай маанисинде эки түз сызык бир тегиздикте жатаарын аныктайлы. Ал үчүн (15.9) шартын пайдаланабыз:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \\ k & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Мындан $k = 3$ экендигине ээ болобу. Демек, $k = 3$ болгондо берилген түз сызыктар бир тегиздикте жатышат. Ошондой эле $\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{4} \neq \frac{4}{2}$ болгондуктан $\bar{p}$ жана $\bar{q}$ векторлору коллинеардуу эмес. Мындан l_1 менен l_2 нин кесилише тургандыгы келип чыгат.

№ 241. $M(2,3,-4)$ чекити $\begin{cases} 2x + 2y + z - 6 = 0, \\ 5x - 2y + 3z + 8 = 0 \end{cases}$ түз сызыгында жатабы?

№ 242. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 7y - 3z = 0 \end{cases}$ түз сызыгы координаталар башталышы аркылуу өтөбү?

№ 243. (Oy) огунун теңдемесин жазгыла.

№ 244. 1) (2,-3,1) чекит аркылуу өтүп, $\vec{p}(-2,4,5)$ векторуна;

2) (1,-1,-2) чекит аркылуу өтүп, $\vec{p}(-4,1,-2)$ векторуна параллель болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 245. $M(2,-1,-3)$, $N(3,1,-5)$ чекиттери аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин жазгыла жана багыттоочу косинустарын тапкыла.

№ 246. (3,2,1) жана (0,-7,-5) чекиттери аркылуу өткөн түз сызыктын параметрдик теңдемелерин тапкыла.

№ 247. (3, 6, -7), (-5, 2, 3) жана (4, -7, -2) чекиттери чокулары болгон үч бурчтуктун медианаларынын параметрдик теңдемесин жазгыла.

№ 248. $\begin{cases} 2x+y-z-3=0, \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ түз сызыгынын координаттык тегиздиктер менен кесилиш чекиттерин тапкыла.

№ 249. t нын кандай маанисинде $\begin{cases} 2x+3y-z+t=0, \\ 3x-2y+2z-6=0 \end{cases}$ түз сызыгы

1) (Ox) огун; **2)** (Oy) огун; **3)** (Oz) огун кесип өтөт.

№ 250. (3, 2, 1) чекити аркылуу өтүп,

1) $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-11}=\frac{z-9}{7}$ түз сызыгына;

2) (Ox) огуна;

3) (Oy) огуна;

4) (Oz) огуна параллель болгон түз сызыктын каноникалык теңдемесин жазгыла.

№ 251. (2,3,-5) чекити аркылуу өтүп, $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$ түз сызыгына параллель болгон түз сызыктын каноникалык теңдемесин тапкыла.

№ 252. $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$ түз сызыгынын каноникалык теңдемесин жазгыла.

№ 253. $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0 \end{cases}$ түз сызыгынын параметрдик теңдемелерин жазгыла.

№ 254. (-4, -5, 3) чекити аркылуу өтүп, $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ жана $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$ түз сызыктары менен кесилишкен түз сызыктын теңдемесин тапкыла.

№ 255. A(3, -1, 1), B(1, 2, -7) жана C(-5, 14, -3) чокулуу үч бурчтуктун B чокусунан чыккан биссектрисасынын каноникалык теңдемесин жазгыла.

№ 256. A(1, -2, -4), B(3, 1, -3) жана C(5, 1, -7) үч бурчтуктун B чокусунан түшүрүлгөн бийиктигинин параметрдик теңдемесин жазгыла.

№ 257.

1) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ жана $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=9t, \\ y=5t, \\ z=-3+t \end{cases}$ жана $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=7+t, \\ z=3+4t \end{cases}$ жана $\begin{cases} x=6+3t, \\ y=-1-2t, \\ z=-2+t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$ жана $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ z-4=0 \end{cases}$ жана $\begin{cases} x+z-8=0, \\ 2y+3z-7=0 \end{cases}$

түз сызыктарынын өз ара жайланышын аныктагыла.

№ 258. 1) $x=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ жана $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\2x+3y-8z+3=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x=1+2t,\\y=-2+3t,\\z=1-6t\end{cases}$ жана $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\2x+3y-8z+3=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y-3z-1=0,\\2x-y-9z-2=0\end{cases}$ жана $\begin{cases}2x+y+2z+5=0,\\2x-2y-z+2=0\end{cases}$ түз сызыктарынын

перпендикуляр экендигин көрсөткүлө.

№ 259. $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ жана $\frac{x-3}{m}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$ түз

сызыктары m дин кандай маанилеринде кесилишет?

№ 260. $P(7,9,7)$ чекитинен $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ түз сызыгына

чейинки аралыкты тапкыла.

№ 261.

1) $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ жана $\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{-3}$;

2) $x-3=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ жана $x+2=y-3=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$ кайчылаш түз

сызыктарынын арасындагы аралыкты тапкыла.

№ 262.

1) $\begin{cases}y+1=0,\\x+2z-1=0\end{cases}$ жана $\begin{cases}x=0,\\z=1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x-y-4z-5=0,\\2x+y-2z-4=0\end{cases}$ жана $x+2=y-3=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$

түз сызыктарынын арасындагы бурчту тапкыла.

§16. Тегиздик жана түз сызык

Мейкиндикте $\Re = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ координаталар системасына карата d түз сызыгы

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} \tag{16.1}$$

каноникалык теңдемеси менен жана Π тегиздиги

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{16.2}$$

жалпы теңдемеси менен берилсин.

1. d түз сызыгы менен Π тегиздигинин арасындагы φ бурчу

$$\sin\varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}} \tag{16.3}$$

формуласы менен аныкталат.

2. d түз сызыгы менен Π тегиздигинин параллель болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0. \tag{16.4}$$

3. d түз сызыгы менен Π тегиздигинин перпендикуляр болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}. \tag{16.5}$$

4. d түз сызыгынын Π тегиздигинде жатышынын зарыл жана жетиштүү шарттары:

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \tag{16.6}$$

d түз сызыгы менен Π тегиздигинин кесилишин табуу үчүн (16.1) жана (16.2) теңдемелерин системада кароо керек. Кесилишти табууда (16.1) теңдемени төмөндөгүдөй параметрдик көрүнүшүндө жазып алуу ыңгайлуу:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t, \end{cases}$$

мында x, y, z терди (16.2) ге алып барып коюп, t нын маанисине ээ болобуз. t нын табылган маанисин түз сызыктын параметрдик теңдемелерине алып барып коюп, изделүүчү чекиттин координаталарын табабыз.

Мисал 16.1. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-3}$ түз сызыгы менен $2x + 3y - z - 6 = 0$ тегиздигинин кесилиш чекитин тапкыла.

Чыгаруу. Берилген түз сызыктын параметрдик теңдемелери төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$x = 1 + 2t,\ \ y = -2 + 3t,\ \ z = 3t.$$

Бул теңдемелердеги x, y, z тин маанилерин тегиздиктин теңдемесине алып барып коюп, t ны табабыз:

$$2(1 + 2t) + 3(-2 + 3t) - 3t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

t нын табылган маанисин түз сызыктын параметрдик теңдемелерине алып барып коелу. Анда

$$x = 3,\ \ y = 1,\ \ z = 3.$$

Демек, берилген түз сызык менен тегиздик $P(3,1,3)$ чекитинде кесилишет.

Мисал 16.2. $M(1,2,3)$ чекити берилген. $2x+y-z-13=0$ тегиздигине карата M чекитине симметриялуу болгон N чекитинин координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. M чекити аркылуу өтүп, берилген тегиздикке перпендикуляр болгон түз сызыктын теңдемесин жазалы. M чекити аркылуу өткөн түз сызыктын каноникалык теңдемесин төмөндөгү көрүнүштө болот:

$$\frac{x-1}{a_1}=\frac{y-2}{a_2}=\frac{z-3}{a_3}.$$

Изделүүчү түз сызык берилген тегиздикке перпендикуляр болгондуктан, (16.5) шарт боюнча $\frac{2}{a_1}=\frac{1}{a_2}=\frac{-1}{a_3}$ деп жаза алабыз.

$a_1=2,\ a_2=1,\ a_3=-1$ деп алып, түз сызыктын каноникалык теңдемесине ээ болобуз:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}.$$

Ал эми параметрдик теңдемелери

$x=1+2t,\quad y=2+t,\quad z=3-t$ көрүнүшүндө болот.

x, y, z тин маанмлерин тегиздиктин теңдемесине коюп, t ны табалы:

$$2(1+2t)+(2+t)-(3-t)-13=0 \Rightarrow t=2.$$

Түз сызык менен тегиздиктин кесилиши болгон K чекити (5, 4, 1) координаталарына ээ болот. K чекити $[MN]$ кесиндисинин орто чекити болгондуктан, N чекитинин координаталарын төмөнкү формулалардан табабыз:

$$x_K = \frac{x_M + x_N}{2}, \quad y_K = \frac{y_M + y_N}{2}, \quad z_K = \frac{z_M + z_N}{2}.$$

Ошентип, $N(9,6,-1)$.

№ 263. **1)** $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = -5 + 4t \end{cases}$ түз сызыгы менен $4x - 3y - 6z - 5 = 0$ тегиздигинин;

2) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ түз сызыгы менен $4x - 3y + 7z - 7 = 0$ тегиздигинин өз ара жайланышын аныктагыла.

№ 264. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{6}$ түз сызыгы менен $2x + 3y + z - 1 = 0$ тегиздигинин кесилишин тапкыла.

№ 265. $\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0, \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$ түз сызыгынын $5x + 3y - 4z + 11 = 0$, $5x + 3y - 4z - 41 = 0$ тегиздиктердин арасында камалган кесиндисинин орто чекити жана (2,-4,-1) чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин тапкыла.

№ 266. $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ түз сызыгы жана (2,-2,1) чекити аркылуу өткөн тегиздиктин теңдемесин тапкыла.

№ 267. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ жана $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$ параллель түз сызыктары аркылуу өткөн тегиздиктин теңдемесин тапкыла.

№ 268. $(3,-2,-4)$ чекити аркылуу өтүп, $3x-2y-3z-7=0$ тегиздигине параллель болгон жана $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$ түз сызыгын кесип өткөн түз сызыкты тапкыла.

№ 269. $3x+12y-3z-5=0$, $3x-4y+9z+7=0$ тегиздиктерине параллель болгон жана $\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$ түз сызыктары менен кесилишкен түз сызыктын параметрдик теңдемелерин жазгыла.

№ 270. 1) $(1,-1,1)$ чекити аркылуу өтүп, $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$ түз сызыгына;

2) $(1,-2,1)$ чекити аркылуу өтүп, $\begin{cases}x-2y+z-3=0,\\ x+y-z+2=0\end{cases}$ түз сызыгына;

3) $(2,-3,-5)$ чекити аркылуу өтүп, $6x-3y-5z+2=0$ тегиздигине перпендикуляр болгон түз сызыктын теңдемесин тапкыла.

4) $\begin{cases}3x-2y+z-3=0,\\ x-2z=0\end{cases}$ түз сызыгы аркылуу өтүп, $2x-4y+2z+7=0$ тегиздигине перпендикуляр болгон тегиздиктин теңдемесин тапкыла.

№ 271. *t*нын кандай маанисинде $\begin{cases}3x-2y+z+3=0,\\ 4x-3y+4z+1=0\end{cases}$ түз сызыгы $2x-y+tz-2=0$ тегиздиги менен параллель болот?

№ 272. $\begin{cases} 5x+4y-2z-5=0, \\ x+2z-2=0 \end{cases}$

түз сызыгынын $2x-y+z-1=0$ тегиздигиндеги проекциясын тапкыла.

№ 273. α жана β кандай маанилеринде $\alpha x+\beta y-5=0$ тегиздиги

$\begin{cases} x=3+2t, \\ y=5-3t, \\ z=-2-2t \end{cases}$ түз сызыгына перпендикуляр болот?

§17. Айлана

Аныктама 17.1. Берилген чекиттен бирдей алыстыкта жаткан тегиздиктеги чекиттердин көптүгү **айлана** деп аталат.

Берилген чекит айлананын **борбору** деп аталат. Айлананын борборунан каалаган чекитине чейинки аралык айлананын **радиусу** деп аталат.

Тик бурчтуу координаталар системасында (x_0, y_0) борборлуу r радиустуу айлананын тендемеси

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \tag{17.1}$$

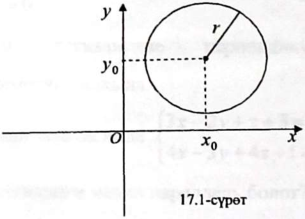
көрүнүшүндө болот.

Аныктама 17.2. Айлана менен бир гана чекитте кесилишкен түз сызык айлананын **жанымасы** деп аталат.

Айлана тегиздикти эки бөлүккө бөлөт:

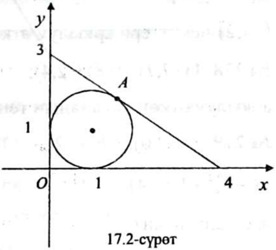
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$ – айлананын ичи;

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>r^2$ – айлананын сырты (17.1-сүрөт)



17.1-сүрөт

Мисал 17.1. Жактары $x=0,\ y=0,\ 3x+4y-12=0$ түз сызыктарында жаткан үч бурчтуктун ичине сызылган айлананын теңдемесин жазгыла.



17.2-сүрөт

Чыгаруу. Жактары берилген түз сызыктарда жаткан үч бурчтук катеттери 3, 4 жана гипотенузасы 5 болгон тик бурчтуу үч бурчтук болот (17.2-сүрөт). Аянты $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ болгон үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын радиусу $r=\dfrac{S}{p}$ болгондуктан, $r=1$ экендиги келип чыгат, мында p – үч бурчтуктун жарым периметри, Айлананын A чекитиндеги жанымасы бул чекитке жүргүзүлгөн радиуска перпендикуляр болгондуктан, айлананын борбору $(1,1)$ чекитинде болушу келип чыгат. Ошентип, изделип жаткан айлананын теңдемеси

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

болот.

№ 274. 1) Борбору (-2,5) чекитинде, радиусу 7 болгон;

2) Борбору (2,-3) чекитинде болуп, (0, 4) чекити аркылуу өткөн айлананын теңдемесин жазгыла.

№ 275. Эгерде айлананын диаметринин эки учу $A(3,1)$ жана $B(-3,3)$ болсо, анда анын тендемесин жазгыла.

№ 276. Борбору (Ox) огунда жаткан, (2,3) жана (5,2) чекиттери аркылуу өткөн айлананын теңдемесин жазгыла.

№ 277. Борбору $x - y + 2 = 0$ түз сызыгында жаткан, (3,0) жана $(-1,2)$ чекиттери аркылуу өткөн айлананын теңдемесин жазгыла.

№ 278. **1)** (7,7), (0,8),(-2,4); **2)** (0,4), (1,2), (3,-2) чекиттери аркылуу өткөн айлананын теңдемесин жазгыла.

№ 279. $A(2,0)$, $B(4,-2)$, $C(0,-4)$, $D(16,2)$, $E(-2,3)$ чекиттери $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 36$ айланасына карата кандайча жайланышкан?

№ 280. Төмөндөгү ийрилердин айлана экендигин көрсөткүлө:

1) $x^2 + y^2 - 6x - 2 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + 4y - 12 = 0$;

3) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y - 7 = 0$.

№ 281. Эгерде координаталар системасынын башталышын

1) (-1,3); **2)** (-5,8) чекиттерине көчүрсөк, анда $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 9 = 0$ айланасынын теңдемеси кандай көрүнүштө болот?

№ 282. Эгерде координаталар системасынын башталышын

1) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 1 = 0$

айланасынын борборуна көчүрсөк, анда айлананын теңдемеси кандай көрүнүштө болот?

№ 283. 1) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$; 2) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$

айланасынын координаталык октор менен кесилиш чекиттерин тапкыла.

№ 284. (Ox) огу менен координаталар башталышында жанышкан, ал эми (Oy) огу менен (0,4) чекитинде кесилишкен айлананын тендемесин жазгыла.

№ 285. (Oy) огу менен (0,-3) чекитинде жанышкан, радиусу 2 болгон айлананын тендемесин жазгыла.

№ 286. Координата октору менен кесилишип, (2,9) чекити аркылуу өткөн айлананын тендемесин жазгыла.

№ 287. Борбору (6,7) чекитинде болгон жана $5x-12y-24=0$ түз сызыгы менен жанышкан айлананын тендемесин жазгыла.

№ 288. $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ айланасы менен

1) $x-y-4=0$; **2)** $3x-4y+36=0$

түз сызыгынын кесилиш чекиттерин тапкыла.

№ 289. $(x-1)^2+y^2=4$ айланасынын $\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ чекити аркылуу өтүп, бул чекитте тең экиге бөлүнүүчү хордасын тапкыла.

№ 290. $x^2+y^2=5$ айланасынын (1,-2) чекитиндеги жанымасынын тендемесин жазгыла.

№ 291. $x^2+y^2=5$ айланасынын $4x-2y+13=0$ түз сызыгына параллель болгон жанымасын тапкыла.

№ 292. $7x+y-3=0, x+7y-3=0$ түз сызыктары менен жанышкан, (1,1) чекити аркылуу өткөн айлананын тендемесин жазгыла.

№ 293. $x^2+y^2-6x+8y=0$ жана $x^2+y^2+2x-12y+1=0$ айланаларынын борборлору аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 294. $x^2+y^2=10$ жана $x^2+y^2-10x-10y+30=0$ айланаларынын жалпы хордасынын теңдемесин жазгыла

§18. Эллипс

Аныктама 18.1. Эгерде тегиздиктин каалаган M чекитинен берилген F_1 жана F_2 чекиттерине чейинки аралыктардын суммасы турактуу сан болуп, F_1 жана F_2 чекиттердин арасындагы аралыктан чоң болсо, анда тегиздиктеги M сыяктуу чекиттеринин көптүгү **эллипс** деп аталат.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (18.1)$$

эллипстин каноникалык теңдемеси.

a – эллипстин чоң жарым огу;

b – эллипстин кичине жарым огу;

с – эллипстин фокалдык жарым аралыгы.

$$b^2=a^2-c^2. \qquad (18.2)$$

$A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ – эллипстин чокулары.

$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ – эллипстин фокустары.

Аныктама 18.2. Эллипстин фокалдык аралыгынын чоң огуна болгон катышы эллипстин **эксцентриситети** деп аталат, б.а.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \ (0 \le \varepsilon < 1) \qquad (18.3)$$

$\rho(M, F_1) = r_1$, $\rho(M, F_1) = r_2$ – эллипстин **фокалдык радиустары**:

$$r_1 = a + \varepsilon x,\ r_2 = a - \varepsilon x, \qquad (18.4)$$

мында x – эллипстин кандайдыр бир чекитинин абсциссасы.

Аныктама 18.3. Эллипстин кичине огуна параллель болушуп, андан $\frac{a}{\varepsilon}$ аралыгында турушкан түз сызыктар эллипстин **директрисалары** деп аталат:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}. \qquad (18.5)$$

(18.5) – эллипстип директрисаларынын теңдемелери болуп саналышат.

Аныктама 18.4. Эллипс менен бир гана чекитте кесилишкен түз сызык эллипстин **жанымасы** деп аталат.

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \qquad (18.6)$$

түз сызыгы эллипстин $M(x_0, y_0)$ чекитиндеги жанымасынын теңдемеси болуп саналат.

Касиеттери:

1^0. Эллипс ар бир координаталык окту эки чекитте кесип өтөт.

2^0. Эллипс эки өз ара перпендикуляр болгон симметрия окторуна ээ.

Симметрия борбору эллипстин **борбору** деп аталат.

3^0. Айлана эллипстин бир учуру ($a = b = r$).

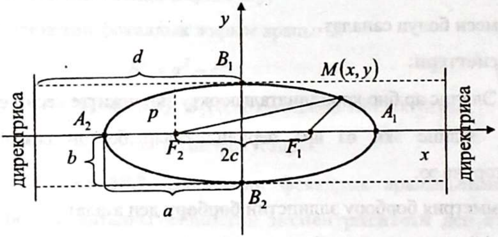
4^0. Эллипс $x=\pm a,\ y=\pm b$ түз сызыктары чектеген тик бурчтуктун ичинде жатат.

5^0. $a<b$ болгон учурда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ теңдемеси фокустары (Oy) огунда жаткан эллипсти аныктайт.

6^0. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,\ a\geq b$ теңдемеси борбору $O'(x_0,y_0)$ чекитинде жаткан, октору координаталык окторуна параллель болгон эллипсти аныктайт.

7^0. Эллипстин ε эксцентриситети эллипстин формасын мүнөздөйт: ε канчалык 1ге жакындаса, эллипс ошончолук кууш болот; ε канчалык нөлгө жакындаса, эллипс ошончолук айланага жакындайт.

8^0. Эллипстин ар бир чекитинен фокусуна чейинки аралык бул чекиттен тиешелүү директрисага чейинки аралыкка болгон катышы эксцентриситетине барабар болот. (Эллипстин директориалдык касиети).



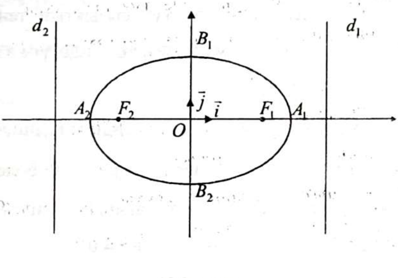
18.1- сүрөт. Эллипс

Мисал 18.1. Кичине огу 8ге барабар болгон эллипстин директрисалары $x=\pm 8$ теңдемелери менен берилген. Эллипстин теңдемесин тапкыла.

Чыгаруу. Алгач xти a жана b аркылуу туюнтуп алалы. $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$ болгондуктан, $x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ га ээ болобуз. Ал эми $x=\pm 8$, $b=4$ болгондуктан,

$$8=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2-16}}\Rightarrow a^4-64a^2+1024=0\Rightarrow a^2=32.$$

Демек, $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$ – изделүүчү эллипстин каноникалык теңдемеси. Мында $A_1(4\sqrt{2},0)$, $A_2(-4\sqrt{2},0)$, $B_1(0,4)$, $B_2(0,-4)$, $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$, $d_1: x=8$, $d_2: x=-8$ (18.2- сүрөт).



18.2-сүрөт.

Мисал 18.2. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ эллипсинин сыртына сызылган квадраттын жактарынын теңдемелерин жазгыла.

Чыгаруу. *ABCD* – берилген эллипстин сыртына сызылган квадрат болсун. Эллипстин сыртына сызылган ар кандай квадраттын чокулары эллипстин окторунда жатышат жана квадраттын жактары окторду барабар кесиндилерде кесип өтөт, башкача айтканда $OA=OB=OC=OD=d$. Анда $A(d,0)$, $B(0,d)$, $C(-d,0)$, $D(0,-d)$ болот. (AB) түз сызыгы берилген эллипстин жанымасы болуп жаткандыктан, анын теңдемеси төмөнкүдөй көрүнүштө болот:

$$\frac{xx_0}{6}+\frac{yy_0}{3}=1, \qquad (а)$$

мында x_0, y_0 – M жануу чекитинин координаталары.

(AB) түз сызыгынын кесиндилердеги теңдемесин карайлы:

$$\frac{x}{d}+\frac{y}{d}=1 \qquad (б)$$

(а) жана (б) теңдемелери бир эле түз сызыктын теңдемелери болуп жаткандыктан, бул теңдемелерден төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$x_0=2y_0$$

Эллипстин теңдемесинен $y_0=1$, $x_0=2$ экендиги келип чыгат.

Анда (AB) түз сызыгынын теңдемеси $x-y-3=0$ болот. Ушуга окшош эле квадраттын башка жактарынын теңдемесине ээ болобуз: $x-y+3=0$, $x+y-3=0$, $x+y+3=0$.

№ 295. Эллипстин фокустары абсцисса огунда жатат жана координаталар башталышына карата симметриялуу. Эгерде эллипстин

1) чоң жарым огу 5ке, кичине жарым огу 2ге;

2) фокалдык аралыгы 8ге, чоң огу 10го;

3) кичине огу 24кө, фокалдык аралыгы 10го;

4) фокалдык аралыгы 6га, эксцентриситети $\frac{3}{5}$кө;

5) чоң огу 20га, эксцентриситети $\frac{3}{5}$кө;

6) кичине огу 10го, эксцентриситети $\frac{12}{13}$ге;

7) директрисаларынын арасындагы аралык 5ке, фокалдык аралыгы 4кө;

8) чоң огу 8ге, директрисаларынын арасындагы аралык 16га;

9) кичине огу 6га, директрисаларынын арасындагы аралык 13кө;

10) директрисаларынын арасындагы аралык 32ге, эксцентриситети $\frac{1}{2}$ге барабар болсо, анда анын теңдемесин тапкыла.

№ 296. Эллипстин фокустары ордината огунда жатат жана координаталар башталышына карата симметриялуу. Эгерде эллипстин

1) жарым октору тиешелүү түрдө 7ге жана 2ге;

2) чоң огу 10го, фокалдык аралыгы 8ге;

3) фокалдык аралыгы 24кө, эксцентриситети $\frac{12}{13}$ге;

4) кичине огу 16га, эксцентриситети $\frac{3}{5}$кө;

5) фокалдык аралыгы 6га, директрисаларынын арасындагы аралык $16\frac{2}{3}$ ге;

6) директрисаларынын арасындагы аралык $10\frac{2}{3}$ ге, эксцентриситети $\varepsilon=\frac{3}{4}$ кө барабар болсо, анда эллипстин теңдемесин жазгыла.

№ 297. Төмөндөгү эллипстердин жарым окторун, фокалдык жарым аралыгын, эксцентриситетин жана директрисаларынын теңдемелерин тапкыла:

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; **2)** $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; **3)** $x^2+25y^2=25$;

4) $x^2+5y^2=15$; **5)** $4x^2+9y^2=25$; **6)** $9x^2+25y^2=1$;

7) $x^2+4y^2=1$; **8)** $16x^2+y^2=16$; **9)** $25x^2+9y^2=1$;

№ 298. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ теңдемеси менен берилген эллипске карата

1) $A_1(1,2)$; **2)** $A_2(-1,3)$; **3)** $A_3(6,1)$; **4)** $A_4(-1,7)$; **5)** $A_1(\sqrt{3},2\sqrt{\frac{2}{3}})$

чекиттеринин жайланышын аныктагыла.

№ 299. Фокустары $F_1(1,0)$, $F_2(0,-1)$ болгон жана чоң огу 4кө барабар болгон эллипстин теңдемесин түзгүлө.

№ 300. Төмөндөгү эллипстердин каноникалык теңдемесин жазгыла:

1) $3x^2+6x+4y^2-9=0$; **2)** $2x^2+5y^2-20y+5=0$;

3) $x^2+4x+3y^2-9y+2=0$; **4)** $5x^2-10x+6y^2-12y-4=0$;

5) $3x^2+12x+8y^2-16y-4=0$.

№ 301. Эллипстин бир фокусунан чоң огунун эки учуна чейинки аралыктар 7 жана 1. Эллипстин теңдемесин жазгыла.

№ 302. Эллипстин директрисаларынын арасындагы аралык фокустардын арасындагы аралыкка караганда 4эсе чоң болсо, анда эллипстин эксцентриситетин тапкыла.

№ 303. Фокустары $(3,0)$ жана $(-3,0)$ болгон эллипсте $(3,3\frac{1}{5})$ чекити алынган. Бул чекиттен директрисаларга чейинки аралыктарды тапкыла.

№ 304. Эллипстин эксцентриситети $\frac{2}{5}$ге, ал эми M чекитинен директрисасына чейинки аралык 20га барабар. M чекитинен бул директриса менен бир жакта жаткан фокусуна чейинки аралыкты тапкыла.

№ 305. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипсинде жатканын $M(-4,2\frac{2}{5})$ чекитинин фокалдык радиустарын тапкыла.

№ 306. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ эллипсинин оң фокусуна чейинки аралык 14кө барабар болгон чекитти аныктагыла.

№ 307. Эки чокусу $x^2+5y^2=20$ эллипсинин фокустарында, ал эми калган эки чокусу анын кичине огунун учтарында жаткан төрт бурчтуктун аянтын тапкыла.

№ 308. Эгерде

1) эллипстин кичине огу фокусунан $\frac{2\pi}{3}$ бурчу менен көрүнсө;

2) фокалдык аралыгы кичине огунун чокусунан $\frac{\pi}{2}$ бурчу менен көрүнсө, анда эллипстин эксцентрситетин тапкыла.

№ 309. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{25/4}=1$ эллипси менен $x+2y-7=0$ түз сызыгынын кесилишин тапкыла.

№ 310. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ эллипсинин $A(-2,4)$ чекитинде тең экиге бөлүнүүчү хордасынын теңдемесин жазгыла.

№ 311. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{5}=1$ эллипсинин $(\sqrt{5},2)$ чекитиндеги жаныма-сын тапкыла.

№ 312. $x+y-1=0$ түз сызыгына параллель болгон $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипсинин жанымаларын тапкыла.

№ 313. $x^2+4y^2=20$ эллипсинин $2x-2y-13=0$ түз сызыгына перпендикуляр болгон жанымаларын тапкыла.

№ 314. Ракетанын жердин бетинен эң узак алыстоосу 197млн.км, эң жакын алыстоосу 147 млн.км. Эгерде ракета жердин айланасында жер бир фокусунда жаткан эллипс боюнча кыймылга келсе, анда ракетанын траекториясынын теңдемесин жазгыла (жердин радиусу эске алынбайт).

№ 315. Эгерде жердин жасалма спутнигинин жерден максималдык алыстоосу 947 км, минималдык алыстоосу 228 км, ал эми жердин радиусу 6371 км болсо, анда жасалма спутниктин кыймылынын траекториясынын эксцентриситетин тапкыла.

№ 316. Космостук ракетанын орбитасы – эксцентрситети 0,14кө барабар болгон эллипс. Бул эллипстин жарым окторунун катыштарын тапкыла.

§19. Гипербола

Аныктама 19.1. Эгерде тегиздиктин каалаган M чекитинен берилген F_1 жана F_2 чекиттерине чейинки аралыктардын айырмасынын абсолюттук чоңдугу турактуу сан болуп, F_1 жана F_2 чекиттердин арасындагы аралыктан кичине болсо, анда тегиздиктеги M сыяктуу чекиттеринин көптүгү **гипербола** деп аталат.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (19.1)$$

гиперболанын каноникалык теңдемеси.

a – гиперболанын чыныгы жарым огу;

b – гиперболанын жорума жарым огу;

c – гиперболанын фокалдык жарым аралыгы.

$$b^2=c^2-a^2 \qquad (19.2)$$

$A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ – гиперболанын чыныгы чокулары.

$B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ – гиперболанын жорума чокулары.

$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ – гиперболанын фокустары.

Аныктама 19.2. Гиперболанын фокалдык аралыгынын чыныгы огуна болгон катышы гиперболанын **эксцентриситети** деп аталат, б.а.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \ (\varepsilon > 1). \tag{19.3}$$

$\rho(M,F_1) = r_1, \quad \rho(M,F_1) = r_2$ – гиперболанын **фокалдык радиустары**:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \ r_2 = a - \varepsilon x, \tag{19.4}$$

мында x – гиперболанын кандайдыр бир чекитинин абсциссасы.

Аныктама 19.3. Гиперболанын жоруму огуна параллель болушуп, анда $\frac{a}{\varepsilon}$ аралыгында турушкан d_1 жана d_2 түз сызыктары гиперболанын **директрисалары** деп аталат жана

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}. \tag{19.5}$$

(19.5) гиперболанын директрисаларынын теңдемелери болуп саналат.

Аныктама 19.4. Гипербола менен бир гана чекитте кесилишкен түз сызык гиперболанын **жанымасы** деп аталат.

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{19.6}$$

теңдеме менен берилген түз сызык гиперболанын $M(x_0, y_0)$ чекитиндеги жанымасы болуп саналат.

Аныктама 19.5.

$$y = \pm \frac{b}{a} x \tag{19.7}$$

теңдемелери менен берилген l_1 жана l_2 түз сызыктары гиперболанын **асимптоталары** деп аталат.

Касиеттери:

1^0. Гипербола (Ox) координаттык огун эки чекитте кесип өтөт.

2^0. Гипербола эки өз ара перпендикуляр болгон симметрия окторуна ээ. Симметрия борбору гиперболанын **борбору** деп аталат.

$a = b$ болсо, гипербола **тең жактуу** деп аталат.

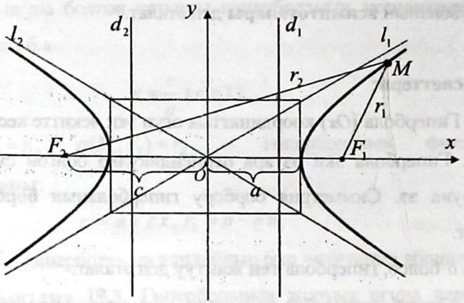
3^0. Гиперболанын бир да чекити $x = \pm a$ түз сызыктары менен чектелген тилкеде жатпайт.

4^0. $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ теңдемеси фокустары (Oy) огунда жаткан гиперболаны аныктайт.

5^0. $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ теңдемеси борбору $O'(x_0, y_0)$ чекитинде жаткан, октору координата окторуна паралелль болгон гиперболаны аныктайт.

6^0. Тең жактуу гиперболанын асимптоталары перпендикуляр болушат.

7^0. Гиперболанын ар бир чекитинен фокусуна чейинки аралык бул чекиттен тиешелүү директрисага чейинки аралыкка болгон катышы эксцентриситетине барабар болот. (Гиперболанын директориалдык касиети).



19.1-сүрөт

Мисал 19.1. $3x^2-4y^2=12$ гиперболасынын окторун, фокустарынын координаталарын, эксцентриситетин, директрисаларынын, асимптоталарынын теңдемелерин жазгыла.

Чыгаруу. Берилген теңдемени каноникалык көрүнүшкө алып келели:

$$\frac{3x^2}{12}-\frac{4y^2}{12}=1 \text{ же } \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1.$$

Мындан $a=\sqrt{4}=2$, $b=\sqrt{3}$; $c=\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{7}$, $F_1\left(-\sqrt{7},0\right)$, $F_2\left(\sqrt{7},0\right)$, эксцентриситети

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{4+3}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2},$$

директрисалары

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \pm\frac{4}{\sqrt{7}},$$

асимптоталары

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

болушу келип чыгат.

Мисал 19.2. Гиперболанын эксцентриситети менен асимптоталарынын арасындагы бурчтун ортосундагы байланышты көрсөткүлө.

Чыгаруу. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ теңдемеси менен берилсин.

$y = \pm\frac{b}{a}x$ – гиперболанын асимптоталарынын теңдемелери. Бул теңдемелерди $bx - ay = 0,\ bx + ay = 0$ көрүнүшүндө жазып алып, бул түз сызыктардын арасындагы бурчтун кесилишин табалы:

$$\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{-a^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - a^2} = \frac{-2a^2 + c^2}{c^2} = -2\left(\frac{a}{c}\right)^2 + 1 = -2\frac{1}{\varepsilon^2} + 1;$$

$$\cos\alpha = -2\frac{1}{\varepsilon^2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

№ 317. Гиперболанын фокустары абсцисса огунда жатып, координаталар башталышына карата симметриялуу. Эгерде гиперболанын

1) чыныгы огу 10го, жорума огу 8ге;

2) фокалдык аралыгы 10го, жорума огу 8ге;

3) фокалдык аралыгы 6га, эксцентриситети $\frac{3}{2}$ге;

4) чыныгы огу 16га, эксцентриситети $\frac{5}{4}$ке;

5) асимптоталарынын теңдемелери $y=\pm\frac{4}{3}x$ болуп, фокалдык аралыгы 20га;

6) директрисаларынын арасындагы аралыгы $22\frac{2}{13}$ге, фокалдык аралыгы 26га;

7) директрисаларынын арасындагы аралык $\frac{32}{5}$ге, жорума огу 6га;

8) директрисаларынын арасындагы аралык $\frac{8}{3}$ге, эксцентриситети $\frac{3}{2}$кө;

9) асимптоталарынын теңдемелери $y=\pm\frac{3}{4}x$ болуп, директрисаларынын арасындагы аралык $12\frac{4}{5}$кө барабар болсо, анда анын каноникалык теңдемесин жазгыла.

№ 318. Гиперболанын фокустары ордината огунда жатып, координаталар башталышына карата симметриялуу. Эгерде гиперболанын

1) чыныгы огу 36га, жорума огу 12ге;

2) фокалдык аралыгы 10го, эксцентриститети $\frac{3}{5}$кө;

3) асимптоталарынын теңдемелери $y = \pm\frac{12}{5}x$ болуп, чокуларынын арасындагы аралык 48ге;

4) директрисаларынын арасындагы аралык $7\frac{1}{7}$ге, эксцентриситети $\frac{7}{5}$ге;

5) асимптоталарынын теңдемелери $y = \pm\frac{4}{3}x$ болуп, директрисаларынын арасындагы аралык $6\frac{2}{5}$ге барабар болсо, анда анын каноникалык теңдемесин жазгыла;

№ 319. Төмөндөгү гиперболалардын жарым окторун, фокалдык жарым аралыгын, эксцентриситетинин, директрисаларынын жана асимптоталарынын теңдемелерин жазгыла.

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; **2)** $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; **3)** $x^2 - 4y^2 = 16$;

4) $x^2 - y^2 = 1$; **5)** $9x^2 - 4y^2 = 36$; **6)** $25x^2 - 16y^2 = 1$.

№ 320. Тең жактуу гиперболанын эксцентриситетин тапкыла.

№ 321. Эгерде гипербола

1) (4,0) жана $(4\sqrt{17},4)$ чекиттери аркылуу өтсө;

2) (-5,3) чекити аркылуу өтүп, эксцентриситети $\varepsilon = \sqrt{2}$ болсо;

3) $4y \pm 3x = 0$ асимптоталарына жана $5x \pm 16 = 0$ директрисаларына ээ болсо, анда анын тендемесин жазгыла

№ 322. Гиперболанын жарым окторунун катышын эксцентриситети аркылуу туюнткула.

№ 323. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболасынан абсциссасы 8ге барабар, ординатасы оң сан болгон чекит алынган. Бул чекиттин фокалдык радиустарын тапкыла.

№ 324. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ эллипси берилген. Гиперболанын чокулары берилген эллипстин фокустарында, фокустары берилген эллипстин чокуларында жатса, гиперболанын теңдемесин жазгыла.

№ 325. Эгерде гиперболанын

1) асимптоталарынын арасындагы бурчу 120° болсо;

2) асимптоталары $y=\pm 3x$ түз сызыктары болсо, анда анын эксцентриситетин тапкыла.

№ 326. $\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1$ гиперболасында $M_1(10,-\sqrt{5})$ чекити берилген. M_1 чекитинин фокалдык радиустары жаткан түз сызыктардын теңдемелерин жазгыла.

№ 327. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ гиперболасында сол фокусуна чейинки аралык 7ге барабар болгон чекитти тапкыла.

№ 328. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ гиперболасынын сол фокусу аркылуу чыныгы огуна перпендикуляр жүргүзүлгөн. Гипербола менен перпендикулярдын кесилиш чекиттеринен фокустарына чейинки аралыкты тапкыла.

№ 329. Гиперболанын фокустары $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипсинин фокустары менен дал келет. Эгерде гиперболанын эксцентриситети $\varepsilon=2$ болсо, анда анын теңдемесин жазгыла.

№ 330. $4x-3y-16=0$ түз сызыгы менен $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ гиперболасынын кесилиш чекиттерин тапкыла.

№ 331. $9x^2-16y^2=144$ гиперболасында сол фокусуна чейинки аралык оң фокусуна чейинки аралыктан эки эсе кичине болгон чекитти тапкыла.

№ 332. $y=\frac{5}{2}x+m$ түз сызыгы mдин кандай маанисинде $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ гиперболасын

1) кесип өтөт. **2)** жанып өтөт, **3)** кесилишпейт.

№ 333. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболасында

1) фокалдык радиус-векторлору перпендикуляр болгон;

2) сол фокусуна чейинки аралык оң фокусуна чейинки аралыкка караганда эки эсе чоң болгон чекитти тапкыла.

№ 334. A(-1,-7) чекити аркылуу өтүп, $x^2-y^2=16$ гиперболасын жануучу түз сызыктын теңдемесин тапкыла

№ 335. $4x+3y-7=0$ түз сызыгына перпендикуляр болгон $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ гиперболасынын жанымасынын теңдемесин жазгыла.

№ 336. $10x-3y+9=0$ түз сызыгына параллель болгон $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ гиперболасынын жанымасынын теңдемесин жазгыла.

№ 337. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ гиперболасында $A(3,-1)$ чекитинде тең экиге бөлгөн хорда жүргүзгүлө. Хорданын теңдемесин жазгыла.

№ 338. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасынын фокустарынан асимптоталарына чейинки аралыктарды жана асимптоталарынын арасындагы бурчту тапкыла.

№ 339. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасынын ичине сызылган квадраттын жагын тапкыла.

№ 340. $x^2-3y^2=12$ гиперболасынын асимптоталары менен борбору гиперболанын оң фокусунда жатып, координаталар башталышы аркылуу өткөн айлананын кесилишин тапкыла.

№ 341. Гиперболанын каалаган чекитинен асимптоталарына чейинки аралыктардан көбөйтүндүсүнүн туруктуу сан болушун далилдегиле.

№ 342. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболасынын оң фокусуна жайгаштырылган жарыктын нуру, гиперболанын $A(-5,\frac{9}{2})$ чекитинде чагылат. Чагылган нурдун теңдемесин жазгыла.

№ 343. Жарыктын булагы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ гиперболасынын сол фокусуна жайгаштырылган. Жарык нуру гиперболанын $B(5,4)$ чекитинде чагылат. Келип түшкөн нур менен чагылган нурдун арасындагы бурчту тапкыла.

§20. Парабола

Аныктама 20.1. Эгерде тегиздиктин каалаган M чекитинен берилген F чекитине чейинки аралык берилген d түз сызыгына чейинки аралыкка барабар болсо, анда M сыяктуу чекиттердин көптүгү **парабола** деп аталат.

Мында F – параболанын **фокусу**, d – **директрисасы** деп аталат.

$$y^2 = 2px \tag{20.1}$$

параболанын каноникалык теңдемеси, мында p – параболанын параметри.

$p=\rho(F,d)$, $F(\frac{p}{2},0)$. Мында $\rho(F,d)$ дегенибиз - F чекитинен d түз сызыгына чейинки аралык.

$$x = -\frac{p}{2} \qquad (20.2)$$

параболанын **директрисасынын** теңдемеси.

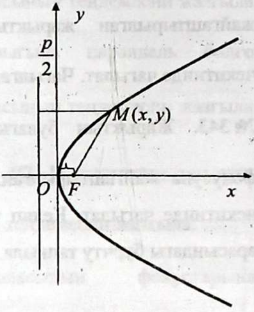
$$yy_0 = p(x + x_0) \qquad (20.3)$$

параболанын $M_0(x_0, y_0)$ чекитиндеги **жанымасынын** теңдемеси.

Касиеттери:

1^0. Парабола симметрия огуна ээ.

Парабола менен симметрия огунун кесилиши параболанын **чокусу** деп аталат.



20.1-сүрөт

2^0. Параболанын бардык чекиттери $x \geq 0$ жарым тегиздигинде жатышат (20.1-сүрөт).

Мисал 20.1. Чокусу координаталар башталышында жаткан, (Ox) огуна симметриялуу болгон жана $(1,3)$ чекити аркылуу өткөн параболанын каноникалык теңдемесин келтирип чыгаргыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча парабола (Ox) огуна симметриялуу болуп, чокусу координаталар башталышында жаткандыктан, анын теңдемесин (20.1) көрүнүштө издейбиз:

$$(3)^2 = 2p \cdot 1,$$

мындан $p = \frac{9}{2}$ экендиги келип чыгат. Анда изделүүчү парабола

$$y^2 = 9x$$

көрүнүшүндө болот.

Мисал 20.2. $y = x^2$ параболасынан $y = x - 4$ түз сызыгына чейинки аралыкты тапкыла.

Чыгаруу. Изделүүчү аралык $y = x - 4$ түз сызыгы менен параболанын бул түз сызыкка параллель болгон жанымасынын арасындагы аралыкка барабар болот (20.2-сүрөт). Ал үчүн параболанын берилген түз сызыкка параллель болгон жанымасын табалы. $y = f(x)$ ийрисинин (x_0, y_0) чекитиндеги жанымасы

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

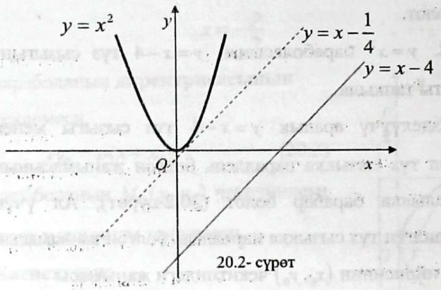
болгондуктан, бул теңдемени $y = x^2$ параболасы үчүн пайдаланалы, анда

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) \text{ же } y = 2x_0 x - x_0^2$$

теңдемесине ээ болобуз. Ошентип,

$$2x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Биз издеп жаткан түз сызыктын теңдемеси $y = x - \frac{1}{4}$ болот. Параллель түз сызыктардын арасындагы аралыкты табуунун (11.4) формуласын пайдаланалы. Анда берилген парабола менен түз сызыктын арасындагы аралык $\frac{15\sqrt{2}}{8}$ барабар болот.



20.2- сүрөт

№ 344.

1) Эгерде параболанын чокусунан фокусуна чейинки аралык 3кө барабар болсо;

2) Эгерде параболанын фокусу (5,0) чекитинде болуп, ордината огу директрисасы болсо;

3) Эгерде парабола (Ox) огуна карата симметриялуу болуп, координаталар башталышы жана $M(1,-4)$ чекити аркылуу өтсө;

4) Эгерде парабола (Oy) огуна карата симметриялуу болуп, фокусу (0,2) чекитинде жайгашып, чокусу координаталар башталышы менен дал келсе;

5) Эгерде парабола (Oy) огуна карата симметриялуу болуп, координаталар башталышы жана $M(6,-2)$ чекити аркылуу өтсө, анда параболанын каноникалык теңдемесин жазгыла.

№ 345. $y^2 = 12x$ параболасынан параболанын чокусуна чейинки аралык $2\sqrt{7}$ ге барабар болгон M чекити алынган. Бул чекиттен директрисага чейинки аралыкты тапкыла.

№ 346. $y^2 = 10x$ параболасынан фокалдык радиусу 4кө барабар болгон M чекити алынган. Бул чекиттен параболанын чокусуна чейинки аралыкты тапкыла.

№ 347. **1)** $y^2 = 6x$, **2)** $y^2 = -3x$, **3)** $y = x^2$, **4)** $y = -\sqrt{3}x^2$ параболасынын фокусунун координаталарын жана директрисасынын теңдемесин тапкыла.

№ 348. $y^2 = 10x$ параболасына карата

1) (5,-7), **2)** (8,9), **3)** (5/2,-5) чекиттери кандайча жайланышкан?

№ 349. $y^2 = \frac{1}{5}x$ параболасынын огуна карата перпендикуляр болгон фокалдык хордасынын узундугун тапкыла.

№ 350. Чокусу координаталар башталышында жайгашкан жана (Ox) огуна карата симметриялуу болгон, параболанын

1) фокусунан директрисасына чейинки аралык 12ге барабар болсо;
2) фокалдык хордасынын узундугу 18ге барабар болгон, параболанын огу менен 45^0түзсө, анда параболанын теңдемесин жазгыла.

№ 351. $y^2 = 6x$ параболасынын хордасы $A(5,3)$ чекити аркылуу өтүп, бул чекитте тең экиге бөлүнөт. Хорданын теңдемесин тапкыла.

№ 352. $y^2 = 3x$ параболасынын $2x + 3y - 5 = 0$ түз сызыгына параллель болгон хордаларынын орто чекиттеринин ордун аныктагыла.

№ 353. Горизонтко тар бурч боюнча ыргытылган таш парабола боюнча кыймылга келип, 16м аралыкка барып түшөт. Параболалык траекториянын эң чоң бийиктиги 12м болсо, анда анын параметрин аныктагыла.

№ 354. Горизонтко 45° бурч менен ыргытылган диск 14м бийиктикке жеткен. Диск канчалык алыстыкка барып түшкөндүгүн тапкыла.

№ 355. $y^2 = 10x$ параболасында

1) M чекити жана параболанын фокусу аркылуу өткөн түз сызык Ox огу менен 60° бурчту түзсө;

2) Бир чокусу M чекитинде, бир чокусу параболанын фокусунда, бир чокусу параболанын огу менен директрисасынын кесилишинде жаткан үч бурчтуктун аянты 5ке барабар болсо;

3) M чекитинен параболанын чокусуна чейинки аралык M чекитинен фокусуна чейинки аралыкка барабар болсо;

4) M чекитинен параболанын чокусуна чейинки аралык менен M чекитинен фокусуна чейинки аралык 8:7 болсо,

анда M чекитин тапкыла.

№ 356. $y^2 = 8x + 17$ параболасы менен $x - y - 2 = 0$ түз сызыгынын кесилиш чекиттерин тапкыла.

№ 357. $y^2 = 12x$ параболасы менен $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипсинин жалпы хордасынын узундугун тапкыла.

№ 358. $y^2 = 4x$ параболасынын фокусунда жайланышкан жарыктын нуру, параболанын $A(9,6)$ чекитинде чагылышат. Чагылышкан нурдун теңдемесин түзгүлө.

№ 359. Эки параболага тең фокус болгон чекит бул параболалардын чокуларынын ортосунда жатат. Параболалардын тик бурч боюнча кесилишээрин далилдегиле.

№ 360. $y^2 = 64x$ параболасы менен $4x+3y+46=0$ түз сызыгынын арасындагы аралыкты тапкыла.

№ 361. Ордината огун жана $x^2+y^2=1$ айланасын жанып өтүүчү айланалардын борборлорунун геометриялык ордун аныктагыла.

№ 362. $Ax+By+C=0$ түз сызыгы менен $y^2 = 2px$ параболасынын 1) кесилиши үчүн; 2) кесилишпөөсү үчүн кандай шарттардын аткарылышы зарыл жана жетиштүү?

§21. Экинчи тартиптеги сызыктардын жалпы теңдемесин каноникалык көрүнүшкө алып келүү

I. Экинчи тартиптеги сызыктар

Экинчи тартиптеги сызыктын 9 түрү бар:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллипс;

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – жорума эллипс;

3. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гипербола;

4. $x^2=2px$ – парабола;

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – кесилишүүчү түгөй түздөр;

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – жорума кесилишүүчү түгөй түздөр;

7. $x^2-a^2=0$ – параллель түгөй түздөр;

8. $x^2+a^2=0$ – жорума параллель түгөй түздөр;

9. $x^2=0$ – дал келүүчү түгөй түздөр.

II. Экинчи тартиптеги сызыктын чекиттерин жалпы теңдемеси боюнча түзүү

$\Re=\{O,\bar{i},\bar{j}\}$ тик бурчтуу координаталар системасына карата γ экинчи тартиптеги сызык

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \qquad (21.1)$$

жалпы теңдемеси менен берилсин, мында $a_{11},a_{12},a_{22},a_{10},a_{20},a_{00}$ – чыныгы сандар жана a_{11},a_{12},a_{22} – коэффициенттери бир учурда нөл эмес.

Экинчи тартиптеги сызыктын жалпы теңдемесин каноникалык көрүнүшкө алып келүү үчүн:

1) $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ мүнөздүк теңдемесинин λ_1, λ_2 тамырларын табабыз;

2) $\mathfrak{R}$ координаталар системасын O чекитинин айланасында α бурчуна буруп, $\mathfrak{R}' = \{O, \overline{i}', \overline{j}'\}$ координаталар системасынын координаталык векторлорун табабыз:

$$tg\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \Rightarrow sin\,\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \qquad cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{i}' = \overline{i}\,cos\,\alpha + \overline{j}\,sin\,\alpha, \quad \overline{j}' = -\overline{i}\,sin\,\alpha + \overline{j}\,cos\,\alpha\,;$$

3) $a'_{10} = a_{10}\,cos\,\alpha + a_{20}\,sin\,\alpha,$ $a'_{20} = -a_{10}\,sin\,\alpha + a_{20}\,cos\,\alpha$ таап, γ сызыгынын $\mathfrak{R}'$ координаталар системасындагы теңдемесин жазабыз:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0; \tag{21.1}$$

4) Координаталар башталышын O' чекитине жылдырып, (21.1) теңдемесинен γ сызыгынын $\mathfrak{R}'' = \{O', \overline{i}', \overline{j}'\}$ координаталар системасындагы каноникалык теңдемесин жазабыз;

5) $\mathfrak{R}'$ координаталар системасын, андан кийин $\mathfrak{R}''$ координаталар системасын түзөбүз. γ сызыгынын чекиттерин каноникалык теңдемеси боюнча $\mathfrak{R}''$ координаталар системасында түзөбүз.

Мисал 21.1. Тик бурчтуу декарттык координаталар системасын координаталар башталышынын айланасында айландыруунун жардамы менен төмөндөгү экинчи тартиптеги сызыктын жалпы теңдемесин каноникалык көрүнүшкө алып келгиле:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0.$$

Мында $a_{11} = 5$, $a_{12} = 4$, $a_{22} = 5$, $a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$, $a_{00} = 9$.

1) Мүнөздүк теңдеменин тамырларын табабыз:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9;$$

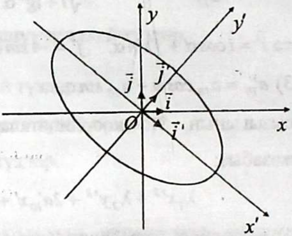
2) $\mathrm{tg}\,\alpha = -1$, $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$.

$$\vec{i'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j},\ \ \vec{j'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

3) Берилген сызыктын $\Re'$ координаталар системасындагы теңдемесин жазалы:

$$x'^2 + 9y'^2 - 9 = 0 \quad \text{же}$$

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1$$ – эллипс (21.1-сүрөт).



21.1-сүрөт

Мисал 21.2. Тик бурчтуу декарттык координаталар системасынын башталышын жылдыруу аркылуу төмөндөгү экинчи тартиптеги сызыктын жалпы теңдемесин каноникалык көрүнүшкө алып келгиле:

$$2x^2 - 8x + 4y + 9 = 0.$$

Чыгаруу. Теңдеменин сол жагын x жана yке карата топтоштуралы:

$$2\left(x^2 - 4x + 4\right) + 4\left(y + \frac{1}{4}\right) = 0 \quad \text{же} \quad (x-2)^2 + 2\left(y + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

$x' = x - 2,\ y' = y + \dfrac{1}{4}$ белгилөөсүн кийирели. Анда O

координаталар башталышын $O'\left(2,-\frac{1}{4}\right)$ чекитине жылдыруу формулаларына ээ болобуз:

$$x = x' + 2,\ y = y' - \frac{1}{4}.$$

Берилген сызыктын $\Re'$ координаталар системасындагы теңдемеси

$$x'^2 = -2y'$$

көрүнүшүндө болот жана ал параболаны аныктайт (21.2-сүрөт).

Мисал 21.3. Тик бурчтуу декарттык координаталар системасын буруу жана координаталар башталышын көчүрүү аркылуу төмөндөгү экинчи тартиптеги сызыктын жалпы теңдемесин каноникалык көрүнүшкө алып келгиле:

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0.$$

$a_{11} = 7$, $a_{12} = 3$, $a_{22} = -1$, $a_{10} = 14$, $a_{20} = 6$, $a_{00} = 28$.

1) $\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$, $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 8;$

2) $tg\alpha = -3,\ \sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}};$

$$\vec{i'} = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j},\quad \vec{j'} = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j};$$

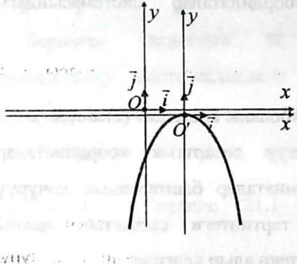
3) $a'_{10} = -\frac{4}{\sqrt{10}},\ a'_{20} = \frac{48}{\sqrt{10}};$

$$x'^2 - 4y'^2 + \frac{4}{\sqrt{10}}x' - \frac{48}{\sqrt{10}}y' + 14 = 0;$$

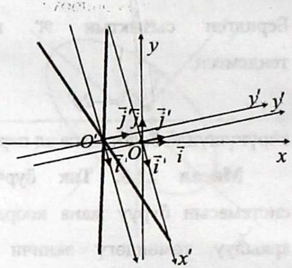
4) $\left(x' + \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 - 4\left(y' + \frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2 = 0,$

$$X = x' + \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad Y = y' + \frac{6}{\sqrt{10}},$$

$X^2 - 4Y^2 = 0$ – кесилишүүчү түгөй түз сызык, мында $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}}\right)$ (21.3-сүрөт).



21.2-сүрөт



21.3-сүрөт

№ 363. Декарттык координаталар системасын буруу аркылуу төмөнкү экинчи тартиптеги сызыктардын теңдемелерин каноникалык түргө келтиргиле. Өзгөртүп түзүү формулаларын жазгыла жана сүрөттөлүштөрүн көрсөткүлө:

1) $4x^2 - 4xy + y^2 - 15 = 0;$

2) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16 = 0;$

3) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0;$

4) $x^2 + 2xy + y^2 = 0;$

5) $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 4 = 0;$

6) $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-2\sqrt{3}x+2y=0$;

7) $34x^2+24xy+41y^2-25=0$;

8) $2x^2+12xy-7y^2+20=0$;

9) $-17x^2+2\sqrt{35}xy+17y^2=0$.

№ 364. Экинчи тартиптеги сызыктардын төмөнкү теңдемелерин тик бурчтуу координаталар системасынын башталышын көчүрүү аркылуу канникалык түргө келтиргиле:

1) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$;

2) $x^2-\frac{1}{4}y^2-x-\frac{3}{2}y-1=0$;

3) $x^2-6x-4y+5=0$;

4) $x^2-10x+26=0$;

5) $x^2-4y^2-4x-8y-4=0$;

6) $x^2-y^2-20y-105=0$;

7) $x^2+y^2-2x+6y+9=0$;

8) $y^2-2x-10=0$;

9) $x^2+2y^2-4x-12y+23=0$;

10) $4x^2+9y^2-8x-32=0$;

11) $x^2-2y^2+2\sqrt{3}x+20y-47=0$.

№ 365. Тик бурчтуу декарттык координаталар системасын буруу жана координаталар башталышын көчүрүү аркылуу төмөндөгү экинчи тартиптеги сызыктардын теңдемелери каноникалык түргө келтиргиле:

1) $29x^2+144xy+71y^2-40x+30y-50=0$;

2) $40x^2+36xy+25y^2-8x-14y+1=0$;

3) $xy+2x+y+\dfrac{5}{2}=0$;

4) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$;

5) $x^2+16y^2-24xy+30x-40y-25=0$;

6) $\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}y^2+2xy-2x-2\sqrt{3}y=0$;

7) $9x^2+6y^2+4xy+2x-4y-4=0$;

8) $9x^2-6xy+y^2-3\sqrt{10}x-9\sqrt{10}y-90=0$.

§22. Экинчи тартиптеги сызыктардын борбору, асимптоталары жана диаметрлери

$\Re=\{O,\bar{i},\bar{j}\}$ тик бурчтуу декарттык координаталар системасына карата экинчи тартиптеги сызык

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \qquad (22.1)$$

жалпы теңдемеси менен берилсин, мында $a_{11},a_{12},a_{22},a_{10},a_{20},a_{00}$ – чыныгы сандар жана a_{11},a_{12},a_{22} – коэффициенттери бир учурда нөл эмес.

Аныктама 22.1. Экинчи тартиптеги сызыктын симметрия борбору (эгерде ал борборго ээ болсо) анын **борбору** деп аталат.

(22.1) экинчи тартиптеги сызыктын борборун табуу үчүн

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{10}=0, \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{20}=0 \end{cases}$$

системасын чечүү керек.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

аныктагычынын белгиси (22.1) теңдеме менен берилген экинчи тартиптеги сызыгынын тибин аныктайт.

Эгерде

$\Delta > 0$ болсо, анда сызык эллиптикалык типтеги;

$\Delta < 0$ болсо, анда сызык гиперболикалык типтеги;

$\Delta = 0$ болсо, анда сызык параболикалык типтеги сызык болот.

Аныктама 22.2. Эгерде

$$a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0$$

барабардыгы орун алса, анда $\overline{p}(m,n)$ вектору (22.1) экинчи тартиптеги сызыкка карата **асимптоталык багытка** ээ деп аталат.

Эгерде $\Delta > 0$ болсо, анда сызык асимптотикалык багытка ээ эмес;

$\Delta < 0$ болсо, анда сызык эки асимптотикалык багытка ээ;

$\Delta = 0$ болсо, анда сызык бир асимптотикалык багытка ээ.

Асимптотикалык багытты кармаган түз сызык **асимптотикалык багыттагы түз сызык** деп аталат.

Аныктама 22.3. Эгерде асимптотикалык багыттагы түз сызык экинчи тартиптеги сызык менен кесилишпесе же бүтүндөй бул сызыкта жатса, анда ал экинчи тартиптеги сызыктын **асимптотасы** деп аталат.

Эгерде $\overline{p} = (m,n)$ вектору асимптотикалык багытка ээ болсо, анда $\overline{p}$ векторуна параллель болгон асимптота

$$m(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + n(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0 \tag{22.2}$$

теңдемеси менен аныкталат.

Аныктама 22.4. (22.1) сызыгынын асимптотикалык багытта болбогон $\overline{p} = (m,n)$ векторуна параллель болгон хордаларынын орто чекиттеринин көптүгү болгон түз сызык экинчи тартиптеги сызыктын $\overline{p}$ векторуна туура келген **диаметри же хордаларга түйүндөш диаметри** деп аталат.

(22.1) теңдемеси менен берилген экинчи тартиптеги сызыктын диаметри (22.2) теңдемеси менен аныкталат.

Эллипстин жана гиперболанын бардык диаметрлери борбору аркылуу өтөт.

Эгерде эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ теңдемеси менен берилсе, анда анын k бурчтук коэффициенттүү хордасына түйүндөш диаметри

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k}x \tag{22.3}$$

теңдемеси менен табылат.

Эгерде гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ теңдемеси менен берилсе, анда анын k бурчтук коэффициенттүү хордасына түйүндөш диаметри

$$y = \frac{b^2}{a^2 k}x \tag{22.4}$$

теңдемеси менен табылат.

Параболанын бардык диаметрлери анын огуна параллель болот. Эгерде парабола $y^2 = 2px$ теңдемеси менен берилсе, анда анын k бурчтук коэффициенттүү хордасына түйүндөш диаметри

$$y = \frac{p}{k} \qquad (22.5)$$

теңдемеси менен табылат.

Эгерде эллипстин же гиперболанын эки диаметринин биринчиси экинчисине параллель болгон хордаларды тең эки бөлсө, анда экинчиси биринчисине параллель болгон хордаларды тең эки бөлөт. Мындай эки диаметр **түйүндөш** деп аталат.

Экинчи тартиптеги сызыктын түйүндөш хордаларга перпендикуляр болгон диаметри **башкы диаметр** деп аталат.

№ 366. $(0,0)$, $(0,2)$, $(-1,0)$, $(-2,1)$, $(-1,3)$ чекиттери аркылуу өткөн экинчи тартиптеги сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 367. $(0,15)$, $(3,0)$, $(5,0)$, $(2,3)$ чекиттери аркылуу өткөн параболалык типтеги сызыктын теңдемесин жазгыла.

№ 368. Эгерде координаталар башталышын $(-2,6)$ чекитине жылдырсак, анда $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$ сызыгынын теңдемеси кандай көрүнүштө болот?

№ 369. Төмөндөгү сызыктардын борборлорун тапкыла:

1) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;

2) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;

3) $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$.

№ 370. $7x^2+4xy+4y^2-40x-32y+5=0$ сызыгынын борборун координаталар башталышына жылдыруу менен теңдемесин жөнөкөйлөткүлө.

№ 371. Төмөндөгү сызыктардын асимптоталык багыттарын тапкыла:

1) $x^2+6xy+2y^2+6x+2y-13=0$;

2) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-41=0$;

3) $x^2-xy+y^2+x+12y+7=0$.

№ 372.

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипсинин $2x-y-3=0$;

2) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ гиперболасынын $2x-y+3=0$;

3) $y^2=12x$ параболасынын $3x+y-5=0$;

түз сызыгын кесип өткөн хордасынын тең ортосу аркылуу өтүүчү диаметринин теңдемесин жазгыла.

№ 373.

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипсинин $A(1,-2)$;

2) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{7}=1$ гиперболасынын $A(3,-1)$;

3) $y^2=20x$ параболасынын $A(2,5)$

чекити аркылуу өтүп, бул чекитте тең экиге бөлүнүүчү хордасынын теңдемесин жазгыла.

№ 374. $2x^2-4xy+5y^2-8x+6=0$ сызыгынын (Ox) огу менен кесилишкенде пайда болгон хордасынын узундугун тапкыла.

№ 375. λ нын кандай маанисинде $2x^2-3xy+y^2-7x+\lambda y+4=0$ сызыгы менен (Oy) огунун кесилишинде пайда болгон хордасынын узундугу 3 кө барабар болот?

§23. Экинчи тартиптеги сызыктардын уюлдук теңдемелери

Эгерде уюлдук координаталар системасында уюл экинчи тартиптеги сызыктын бир фокусу менен дал келсе, анда экинчи тартиптеги сызык төмөндөгү теңдеме менен берилет:

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \tag{23.1}$$

мында p – $\overline{FM}$ векторунун узундугу, ал эми F – фокус, M – экинчи тартиптеги сызык менен фокустан чыккан уюлдук октун перпендикулярынын кесилиши.

Эгерде $\varepsilon<1$ болсо, анда (23.1) теңдеме эллипсти; $\varepsilon>1$ болсо гиперболаны, $\varepsilon=1$ болсо параболаны аныктайт.

Эллипс жана гипербола үчүн p фокалдык параметри a жана b параметрлери менен төмөндөгүдөй байланышат:

$$p=\frac{b^2}{a}. \tag{23.2}$$

Ал эми p парабола үчүн фокалдык параметр болуп эсептелинет.

Мисал 23.1. Эгерде уюлдук ок (Ox) огу менен, уюл F_1 фокусу менен дал келсе, анда $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипсинин уюлдук теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу: Берилген эллипстин эксцентриситети

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{25-9}}{5}=\frac{4}{5}$$

болот. $F_1(-4,0)$ болгондуктан, (Ox) огунун перпендикуляры $x=-4$ теңдемеси менен берилет. Эллипс менен O чекитине түшүрүлгөн перпендикулярдын кесилиш чекити M_1дин ординатасын, $x=-4$ болгон шартта эллипстин теңдемесинен табабыз. $y=\pm\frac{9}{5}$ ке ээ болобуз. Мындан

$$d=|FM_1|=\sqrt{(-4+4)^2+\left(\pm\frac{9}{5}-0\right)^2}=\frac{9}{5}.$$

Ошентип, $p=\frac{9}{5}$. Табылган ε жана pнын маанилерин (23.1) теңдемесине коюп, эллипстин уюлдук координаталар системасындагы теңдемесине ээ болобуз:

$$r=\frac{\frac{9}{5}}{1-\frac{4}{5}cos\,\varphi} \text{ же } r=\frac{9}{5-4cos\,\varphi}.$$

№ 376. $y^2=8x$ параболасынын уюлдук координаталар системасындагы теңдемесин жазгыла.

№ 377. $\rho = \dfrac{6}{1-\cos\varphi}$ теңдемеси менен аныкталган параболанын каноникалык теңдемесин жазгыла.

№ 378. Радиусу a болгон жана борбору 1) уюлда; 2) $(a,0)$ чекитинде; 3) (ρ_1,φ_1) чекитинде жайланышкан айлананын уюлдук координаталар системасындагы теңдемесин түзгүлө.

№ 379. Борбору уюл менен, ал эми фокалдык огу уюлдук ок менен дал келген эллипстин уюлдук координаталар системасындагы теңдемесин жазгыла.

№ 380. $\rho^2 = \dfrac{288}{16-7\cos^2\varphi}$ эллипсинин узундугу 10го барабар болгон диаметри фокалдык окко кандай бурч менен жантайган?

№ 381. Эллипстин фокалдык огу уюлдук ок катары алынып, ал эми уюлду эллипстин

1) сол фокусуна;

2) оң фокусуна

жайлаштырылган. Эллипстин теңдемесин түзгүлө.

№ 382. $\rho = \dfrac{3\sqrt{2}}{2-\cos\varphi}$ эллипсинин жарым окторун жана фокалдык аралыгын тапкыла.

№ 383. Борбору уюл менен, ал эми чыныгы огу уюлдук ок менен дал келген гиперболанын уюлдук координаталар системасындагы теңдемесин тапкыла.

№ 384. $\rho^2 = \dfrac{48}{4\cos^2\varphi-1}$ гиперболасынын асимптоталарынын арасындагы бурчту тапкыла.

№ 385. Гиперболанын фокалдык огун уюлдук ок катары алып, ал эми уюлду оң фокусуна жайгаштырып, гиперболанын теңдемесин түзгүлө.

№ 386. $\rho = \dfrac{2}{1-\sqrt{2}\cos\varphi}$ гиперболасынын асимптоталарынын жана директрисаларынын теңдемелерин жазгыла.

№ 387. Параболанын огун уюлдук ок катары, ал эми чокусун уюлда деп алып, параболанын теңдемесин жазгыла.

№ 388. $\rho = \dfrac{8\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ параболасындагы M чекитинен директрисасына чейинки аралык бул чекиттин радиус-векторуна барабар. Бул чекитти тапкыла.

№ 389. Эгерде параболанын фокусу уюл менен, огу уюлдук ок менен дал келсе, параболанын теңдемесин жазгыла.

№ 390. $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ параболасында

1) эң кыска радиус-векторлуу;

2) радиус-вектору параболанын параметрине барабар болгон чекитти тапкыла.

№ 391. Төмөнкү ийрилердин тик бурчтуу координаталар системасындагы каноникалык теңдемесин жазгыла:

1) $\rho = \dfrac{25}{13-12\cos\varphi}$; **2)** $\rho = \dfrac{1}{3-3\cos\varphi}$; **3)** $\rho = \dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$.

V. Экинчи тартиптеги беттер

§24. Сфера

Аныктама 24.1. Берилген чекиттен бирдей алыстыкта жаткан мейкиндиктеги чекиттердин көптүгү **сфера** деп аталат.

Берилген чекит сферанын **борбору** деп аталат. Сферанын борборунан каалаган чекитине чейинки аралык сферанын **радиусу** деп аталат.

Тик бурчтуу координаталар системасында $C(x_0, y_0, z_0)$ борборлуу r радиустуу сферанын каноникалык тендемеси

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2 \tag{24.1}$$

көрүнүшүндө болот.

Эгерде сферанын борбору координаталар системасынын башталышында жатса, анда анын тендемеси

$$x^2+y^2+y^2=r^2 \tag{24.2}$$

көрүнүшүндө болот.

Аныктама 24.2. Сфера менен бир гана чекитте кесилишкен тегиздик сферанын **жаныма тегиздиги** деп аталат. Ал эми бул жалпы чекит **жануу чекити** деп аталат.

Теорема 24.1. Сферанын ар кандай A чекити аркылуу жалгыз гана жаныма тегиздик өтөт. Бул тегиздик C борборлуу сферанын CA радиусуна перпендикуляр болот.

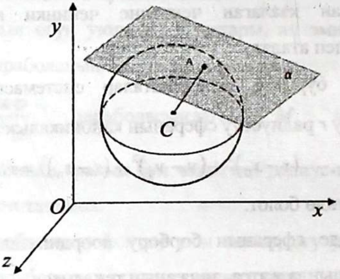
Теорема 24.2. Эгерде сферанын борборунан тегиздикке чейинки аралык радиусунан кичине болсо, анда сферанын тегиздик менен кесилиши айлана болот.

Теорема 24.3. Сферанын борборунан бирдей алыстыкта жаткан тегиздиктер сфераны барабар айланаларда кесип өтөт.

Сфера мейкиндикти эки бөлүккө бөлөт:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2$ – сферанын ичи;

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2>r^2$ – сферанын сырты (24.1-сүрөт)



24.1-сүрөт

Мисал 24.1. Кандай шартта $Ax+By+Cz+D=0$ тегиздиги $x^2+y^2+z^2=r^2$ сферасына жаныма тегиздик болот?

Чыгаруу. Сферанын борбору координаталар башталышында болгондуктан, $O(0,0,0)$ чекитинен $Ax+By+Cz+D=0$ тегиздигине чейинки аралык ((14.2) формула боюнча)

$$\rho=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=r$$

болот. Мындан

$D^2 = r^2\left(A^2 + B^2 + C^2\right)$ же $D^2 = r^2A^2 + r^2B^2 + r^2C^2$ га ээ болобуз.

Демек, $r^2A^2 + r^2B^2 + r^2C^2 = D^2$ болгон учурда $Ax + By + Cz + D = 0$ тегиздиги $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ сферасына жаныма тегиздик болот.

Мисал 24.2. $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + z - 13 = 0$ сферасынын $x = 2t - 1,\ y = -3t + 5,\ z = 4t + 7$ түз сызыкка параллель болгон диаметринин каноникалык тендемесин түзгүлө.

Чыгаруу. Сферанын тендемесин каноникалык көрүнүштө жазалы:

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + \left(z^2 + z + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 13 = 0$$

же $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{63}{4}$. Мындан сферанын борбору $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, радиусу $r = \frac{\sqrt{63}}{2}$ экендигин көрүүгө болот.

Түз сызыктын каноникалык тендемесин жазалы:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-7}{4}.$$

Бул түз сызыктын багыттоочу вектору $\bar{l} = (2, -3, 4)$ шарт боюнча сферанын диаметринин да багыттоочу вектору болот. Изделүүчү диаметр $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ чекити аркылуу өткөндүктөн, анын каноникалык тендемеси төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-3}=\frac{z+\frac{1}{2}}{4}.$$

№ 392. Төмөнкү учурлардын ар биринде сферанын тендемесин жазгыла:

1) Борбору $C(0,0,0)$ чекити, радиусу $r=9$ болсо;

2) Борбору $C(5,-3,7)$ чекити, радиусу $r=2$ болсо;

3) Борбору $C(4,-4,-2)$ чекитинде болуп, координаталар башталышы аркылуу өтсө;

4) $A(2,-3,5)$ жана $B(4,1,-3)$ чекиттери сферанын диаметралдык карама-каршы чекиттери болсо;

5) Борбору координаталар башталышы болуп, $16x-15y-12z+75=0$ тегиздиги жаныма тегиздиги болсо;

6) Сфера $M_1(3,1,-3)$, $M_2(-2,41)$ жана $M_3(-5,0,0)$ чекиттери аркылуу өтүп, борбору $2x+y-z+3=0$ тегиздигинде жатса;

7) $M_1(1,-2,-1)$, $M_2(-5,10,-1)$, $M_3(4,1,11)$ жана $M_4(-8,-2,2)$ чекиттери аркылуу өтсө.

№ 393. Радиусу $r=3$ болгон сфераны $x+2y+2z+3=0$ тегиздиги $M(1,1,-3)$ чекитинде жанып өтөт. Сферанын тендемесин жазгыла.

№ 394. $3x+2y-6z-15=0$, $3x+2y-6z+55=0$ тегиздиктери менен жанышкан сферанын радиусун тапкыла.

№ 395. Төмөндөгү тендемелер менен берилген сферанын борборунун координаталарын жана радиусун аныктагыла:

1) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=16$;

2) $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=9$;

3) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$;

4) $x^2+y^2+z^2-6z=0$;

5) $x^2+y^2+z^2+20y=0$.

№ 396. Төмөндөгү тендеме менен берилген сферага карата $A(2,-1,3)$ чекити кандайча жайланышкан (ичинде, сыртында, сферада):

1) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$;

2) $(x+14)^2+(y-11)^2+(z+12)^2=625$;

3) $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$;

4) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+22=0$;

5) $x^2+y^2+z^2-x+3y-2z-3=0$?

№ 397.

1) $A(-2,6,-3)$ чекитинен $x^2+y^2+z^2=4$ сферасына;

2) $A(9,-4,-3)$ чекитинен

$x^2+y^2+z^2+14x-16y-24z+241=0$ сферасына;

3) $A(1,-1,3)$ чекитинен $x^2+y^2+z^2-6x+4y-10z-62=0$ сферасына чейинки эн кыска аралыкты тапкыла

№ 398. 1) $z = 3$ тегиздиги $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0$ сферасына;

2) $y = 1$ тегиздиги $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$ сферасына;

3) $x = 5$ тегиздиги $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$ сферасына карата кандайча жайланышкан (кесип өтөт, жанып өтөт, кесилишпейт)?

№ 399. $\begin{cases}(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0\end{cases}$ айланасынын борборун жана радиусун тапкыла.

№ 400. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ сферасынын $M(6, -3, -2)$ чекитиндеги жаныма тегиздигинин тендемесин жазгыла.

№ 401. $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ тегиздигинин $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ сферасына жаныма тегиздик болушун далилдегиле. Жануу чекитинин координаталарын тапкыла.

№ 402. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$ сферасынын $M(-1, 3, 0)$ чекитиндеги жаныма тегиздигин тапкыла.

№ 403. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ сферасынын $4x + 3z - 17 = 0$ тегиздигине параллель болгон жаныма тегиздиктерининин тендемесин жазгыла.

§25. Айлануу беттери. Цилиндрдик жана конустук беттер

I. Айлануу беттери

Аныктама 25.1. γ ийрисин кандайдыр бир бекемделген d түз сызыгынын айланасында айландыруудан пайда болгон бет **айлануу бети** деп аталат.

d түз сызыгы **айлануу огу** деп аталат. Айлануу кезинде $M \in \gamma$ чекитинин изи айлана болот.

Айлануу огуна перпендикуляр болгон тегиздиктер менен айлануу бетинин кесилишинен пайда болгон айланалар **параллелдер** деп аталат.

Айлануу огу аркылуу өткөн жарым тегиздик менен айлануу бетинин кесилишинен пайда болгон ийрилер **меридиандар** деп аталат (25.1-сүрөт).

25.1-сүрөт

Тик бурчтуу координаталар системасы берилсин.

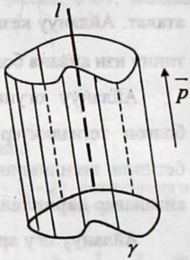
(yOz) тегиздигинде ийри сызык $f(y,z)=0,\ \ y>0$ тендемеси менен берилсин. Берилген ийри сызыкты (Oz) огунун айланасында айланталы. Айлануудан пайда болгон беттин тендемеси төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0. \qquad (25.1)$$

II. Цилиндрдик беттер

Аныктама 25.2. Тегиздикте жаткан γ ийриси аркылуу өтүп, берилген $\bar{p}$ векторуна параллель болгон мейкиндиктеги l сызыктуу түз сызыктардын көптүгү **цилиндрдик бет** же **цилиндр** деп аталат.

$\bar{p}$ векторуна параллель болуп, цилиндрдик бетте жаткан l түз сызыгы бул беттин **түзүүчүсү**, ал эми γ ийриси **багыттоочусу** деп аталат (25.2-сүрөт).



25.2-сүрөт

Тик бурчтуу координаталар системасында цилиндрдик беттин багыттоочу сызыгы

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

тендемелери менен берилсин, ал эми түзүүчүлөрү $\bar{p}(a, b, c)$ векторуна параллель болушсун. Цилиндрдик беттин түзүүчүлөрүнүн параметрдик тендемелери төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

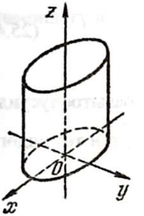
$$\begin{cases} x = x_0 + a\,t, \\ y = y_0 + b\,t, \\ z = z_0 + c\,t, \end{cases} \qquad (25.2)$$

мында (x_0, y_0, z_0) – цилиндрдик беттин багытоочусунда жаткан чекит.

Цилиндрдик беттин тендемесин алуу үчүн төмөндөгү тендемелер системасынан

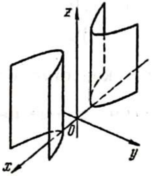
$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct, \\ f(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ g(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases} \qquad (25.3)$$

$x_0, y_0, z_0; t$ өзгөрүлмөлөрүн жоюу керек.

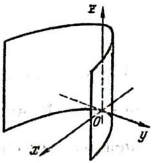


25.3-сүрөт. Эллиптикалык цилиндр

III.



25.4-сүрөт. Гиперболалык цилиндр

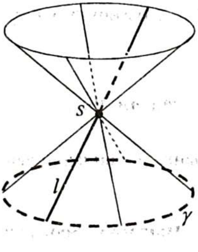


25.5-сүрөт. Параболалык цилиндр

III. Конустук беттер

Аныктама 25.3. Тегиздикте жаткан γ ийриси жана бул ийриде жатпаган мейкиндиктеги S чекити аркылуу өткөн l сыяктуу түз сызыктардын көптүгү **конустук бет** же **конус** деп аталат.

S – конустун **чокусу**, l **түзүүчүсү**, γ – **багыттоочусу** деп аталат (25.5-сүрөт).



25.5-сүрөт

Тик бурчтуу координаталар системасында багытоочусу

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0, \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

тендемелери менен берилген, чокусу $S(x_0,y_0,z_0)$ болгон конустук бетти карайлы. Конустук беттин түзүүчүлөрүнүн параметрдик тендемелери төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$\begin{cases} x = x_0 + (\tilde{x} - x_0)t, \\ y = y_0 + (\tilde{y} - y_0)t, \\ z = z_0 + (\tilde{z} - z_0)t. \end{cases} \qquad (25.4)$$

Мында $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ чекити конустук беттин багытоочусунда жаткан чекит. Конустук беттин тендемесин алуу үчүн төмөндөгү тендемелер системасынан

$$\begin{cases} x = x_0 + (\tilde{x} - x_0)t, \\ y = y_0 + (\tilde{y} - y_0)t, \\ z = z_0 + (\tilde{z} - z_0)t, \\ f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=0, \\ g(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=0 \end{cases} \qquad (25.5)$$

$\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\ t$ өзгөрүлмөлөрүн жоюу керек.

Мисал 25.1. $\begin{cases} 3y+5z-2=0, \\ x=0 \end{cases}$ түз сызыгын (Oz) огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

Чыгаруу. Берилген сызык (yOz) тегиздигинде жатып, айлануу огу (Oz) болгондуктан, анын теңдемесин

$$\begin{cases} y = f(z), \\ x = 0 \end{cases}$$

көрүнүшүнө алып келебиз, башкача айтканда

$$\begin{cases} y = \dfrac{2-5z}{3}, \Rightarrow f(z) = \dfrac{2-5z}{3}. \\ x = 0 \end{cases}$$

(25.1) шарты боюнча айлануу бетинин теңдемеси төмөндөгүдөй болот:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2-5z}{3}\right)^2 \text{ же } x^2 + y^2 - \left(\frac{2-5z}{3}\right)^2 = 0.$$

Бул теңдемени каноникалык көрүнүшкө алып келели:

$$x^2 + y^2 - \frac{\left(z - \frac{2}{5}\right)^2}{\frac{9}{25}} = 0.$$

Ошентип, огу (Oz) огу болгон, чокусу $\left(0, 0, \frac{2}{5}\right)$ чекитинде жаткан айлануу конустук бетине ээ болдук.

Мисал 25.2. $y^2 + z^2 = 2z$ теңдемеси менен кайсы цилиндрдик бет берилген? Бул беттин багыттоочусунун теңдемесин жазгыла жана түзүүчүлөрүнүн багытын аныктагыла.

Чыгаруу. Берилген теңдемеден z боюнча толук квадратты бөлүп алалы да, каноникалык көрүнүшкө алып келели:

$$y^2 + (z^2 - 2z + 1) - 1 = 0 \text{ же } y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Изделип жаткан бет – тегерек цилиндр. Анын багыттоочусу

$$\begin{cases} y^2+(z-1)^2=1, \\ x=0 \end{cases}$$

теңдемелери менен берилет жана борбору $(0,0,1)$ чекитинде болгон айлана болот, ал эми түзүүчүлөрү (Ox) огуна параллель болушат.

Мисал 25.3. Чокусу координаталар башталышында жаткан, багытоочусу

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+y^2=1, \\ z=5 \end{cases}$$

теңдемелери менен берилген конустук беттин теңдемесин тапкыла.

Чыгаруу. (25.5) шарт боюнча изделип жаткан конустук беттин каноникалык теңдемеси

$$\frac{x^2}{9}+y^2-\frac{z^2}{25}=0$$

көрүнүшүндө болот.

№ 404. Айлануу бетинин теңдемеси катары сферанын, конустун жана цилиндрдин теңдемесин келтирип чыгаргыла.

$$\begin{cases} y^2+z^2=r^2, \\ x=0 \end{cases}$$

айланасын (Oz) огунун айланасында айландырууда пайда болгон бет катары сферанын теңдемесин;

$$\begin{cases} z=ky, \\ x=0 \end{cases}$$

түз сызыгын (Oz) огунун айланасында айландырууда пайда болгон бет катары конустун;

$$\begin{cases} y = c, c = const, \\ x = 0 \end{cases}$$

түз сызыгын (Oz) огунун айланасында айландырууда пайда болгон бет катары цилиндрдин теңдемесин келтирип чыгаргыла.

№ 405. $\begin{cases} (y - y_0)^2 + z^2 = r^2, \\ x = 0 \end{cases}$

айланасын (Oz) огунун айланасында айландырууда пайда болгон беттин (тордун) теңдемесин жазгыла, мында $0 < r < y_0$.

№ 406. Төмөндөгү теңдемелер менен кайсы беттер берилген:

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$; **2)** $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$;

3) $y^2 = 12z$; **4)** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$?

№ 407. Чокусу координаталар башталышында жаткан, багыттоочусу

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 9, \\ z = 4 \end{cases}$$

теңдемеси менен берилген конустун теңдемесин жазгыла.

№ 408. Чокусу $(4, 0, -3)$ чекитинде жаткан, багыттоочусу

$$\begin{cases} \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

теңдемеси менен берилген конустун теңдемесин жазгыла.

№ 409. Чокусу $(-3, 0, 0)$ чекитинде жаткан, багыттоочусу

$$\begin{cases}3x^2+6y^2-z=0,\\ x+y+z=1\end{cases}$$

теңдемеси менен берилген конустун теңдемесин жазгыла.

№ 410. $(x-5)^2+(y+1)^2+z^2=16$ сферасына координаталар башталышынан чыгарылган жанымаларынын геометриялык ордун аныктагыла.

№ 411. Координаталык октор аркылуу өткөн тик конустун теңдемесин жазгыла.

№ 412. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{6}$ түз сызыгын (Ox) огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин жазгыла.

№ 413. Багыттоочусу

$$\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ z=0\end{cases}$$

теңдемелери менен берилген, түзүүчүлөрү $\bar{a}(5,3,2)$ векторуна параллель болгон цилиндрдик беттин теңдемесин жазгыла.

№ 414. Багыттоочусу

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25,\\ x+y-z+2=0\end{cases}$$

теңдемелери менен берилген, түзүүчүлөрү

$$\begin{cases}x=y,\\ z=c,\ \ c=const\end{cases}$$

түз сызыгына параллель болгон цилиндрдик беттин теңдемесин жазгыла.

№ 415. Багыттоочусу

$$\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z \end{cases}$$

теңдемелери менен берилген, түзүүчүлөрү багыттоочусунун тегиздигине перпендикуляр болгон цилиндрдик беттин теңдемесин жазгыла.

№ 416. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ сферасынын сыртына сызылган, түзүүчүлөрү координата октору менен бирдей бурчту түзгөн цилиндрдин теңдемесин жазгыла.

№ 417. $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$ конусунун айлануу огу менен түзүүчүлөрүнүн арасындагы бурчту тапкыла.

§26. Эллипсоид

Аныктама 26.1. Эллипсти чоң огунун же кичине огунун айланасында айландыруудан пайда болгон бет **айлануу эллипсоиди** деп аталат.

Эгерде (xOy) координаттык тегиздигинде жаткан

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{26.1}$$

эллипсин (Ox) огунун айланасында айландырсак, анда пайда болгон **айлануу эллипсоиди**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{26.2}$$

теңдемеси менен берилет.

Аныктама 26.2. Айлануу эллипсоидин эллипс жаткан тегиздикке карата кысуудан пайда болгон бет **эллипсоид** деп аталат.

Эллипсоид $(Oxyz)$ координаталар системасына карата

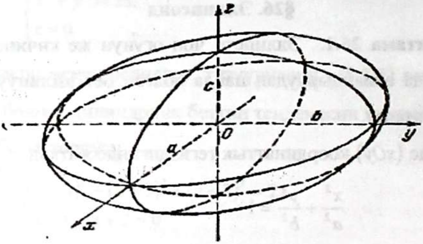
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (26.3)$$

теңдемеси менен берилет.

Мында a,b,c – эллипсоиддин **жарым октору**;

$A_1(a,o,o)$, $A_2(-a,o,o)$, $B_1(o,b,o)$, $B_2(o,-b,o)$, $C_1(o,o,c)$, $C_2(o,o,-c)$ чекиттери эллипсоиддин **чокулары**;

$[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$ жана $[C_1C_2]$ кесиндилери **октору** деп аталышат.



27.1-сүрөт

Эллипсоиддин окторунун кесилиши элипсоиддин **борбору** деп аталат.

Эллипсоиддин тегиздиктер менен кесилишинде эллипске ээ болобуз.

Эллипсоиддин координаттык тегиздиктер менен кесилиши **башкы кесилиштер** деп аталат.

Мисал 26.1. $M\left(1,2,\sqrt{23}\right)$ чекити жана $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипси аркылуу өткөн эллипсоиддин теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. Берилген эллипс эллипсоид менен (xOy) тегиздигинин кесилиши болгондуктан, эллипсоиддин теңдемесин төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

cны табуу үчүн M чекитинин эллипсоидде жатышын пайдаланабыз:

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{16}+\frac{23}{c^2}=1.$$

Мындан $c^2=36$ экендиги келип чыгат. Анда эллипсоиддин теңдемеси төмөндөгүдөй болот:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1.$$

№ 418. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипсин (Oy) огунун айланасында айландыруудан пайда болгон бетти чийгиле.

№ 419. Төмөнкү беттерди чийгиле:

1) $5x^2+y^2+9z^2-45=0$;

2) $11x^2+9y^2+2z^2-33=0$;

3) $6x^2+3y^2+2z^2-72=0$;

4) $2x^2+7y^2+4z^2-28=0$;

5) $7x^2+4y^2+3z^2-42=0$.

№ 420. (xOy) тегиздигинде жаткан эллипстин борбору координаталар башталышы менен дал келет, ал эми чоӊ огу (Ox) огунда жатат. Чоӊ огу 10го барабар болгон эллипс $M(3,2,0)$ чекитти аркылуу өтсө, анда эллипсти чоӊ огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теӊдемесин тапкыла.

№ 421. (xOz) тегиздигинде жаткан эллипстин борбору координаталар башталышына дал келет, ал эми чоӊ огу Ox огунда жатат. Эгерде эллипстин эксцентриситети $\frac{3}{5}$, жана огу 8 болсо, анда эллипсти чоӊ огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теӊдемесин тапкыла.

№ 422. (yOz) тегиздигинде жаткан эллипстин борбору координаталар башталышы менен дал келет, ал эми чоӊ огу Ox огунда жатат. Эгерде эллипстин бир фокусунан чоӊ огунун эки учуна чейинки аралыктар 3 жана 7 болсо, анда эллипсти чоӊ огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теӊдемесин тапкыла.

№ 423. (yOz) тегиздигинде жаткан эллипстин борбору координаталар башталышы менен дал келет, ал эми чоӊ огу Ox огунда жатат. Эгерде эллипстин директрисаларынын арасындагы аралык 10, ал эми эксцентриситети 0,8 болсо, анда эллипсти чоӊ огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теӊдемесин тапкыла.

№ 424. (xOy) тегиздигинде жаткан эллипстин борбору координаталар башталышы менен дал келет, ал эми чоң огу Ox огунда жатат. Эгерде эллипстин фоколдык аралыгы 12, директрисаларынын арасындагы аралык 36 болсо, анда эллипсти фоколдык огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 425. $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ эллипсоиди менен $x-4=0$ тегиздигинин кесилишинен пайда болгон эллипстин жарым окторун тапкыла.

№ 426. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипсоиди менен $y+2=0$ тегиздигинин кесилишинен пайда болгон эллипстин борборунун жана чокуларынын координаталарын тапкыла.

№ 427. $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{8}=1$ эллипсоиди менен $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{1}$ түз сызыгынын кесилиши чекити M ди тапкыла.

№ 428. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{10}=1$ эллипсоидинин $M(1,\ 2,\ -3)$ чекити аркылуу өткөн диаметринин узундугун тапкыла.

№ 429. Төмөнкү беттердин борборунун координаталарын жана жарым окторун тапкыла:

1) $4x^2+16x+2y^2-12y+5z^2-20z-6=0$;

2) $8x^2+16x+5y^2-20y+3z^2-6z-14=0$;

3) $6x^2+4y^2-8y+8z^2-24z-5=0$.

§27. Гиперболоиддер

I. Бир көңдөйлүү гиперболоид

Аныктама 27.1. Гиперболаны жорума огунун айланасында айландыруудан пайда болгон бет бир көңдөйлүү **айлануу гиперболоиди** деп аталат.

Эгерде (xOy) координаттык тегиздигинде жаткан $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасын (Oy) огунун айланасында айландырсак, анда пайда болгон бир көңдөйлүү айлануу гиперболоиди

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 \qquad (27.1)$$

теңдемеси менен берилет.

Аныктама 27.2. Бир көңдөйлүү айлануу гиперболоидин гипербола жаткан тегиздикке карата кысуудан пайда болгон бет **бир көңдөйлүү гиперболоид** деп аталат (27.1-сүрөт)

Бир көңдөйлүү гиперболоид $(Oxyz)$ координаталар системасына карата

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (27.2)$$

теңдемеси менен берилет.

Мында a, c – бир көңдөйлүү гиперболоиддин чыныгы жарым октору, b – жорума жарым огу;

$A_1(a,o,o)$, $A_2(-a,o,o)$, $C_1(o,o,c)$, $C_2(o,o,-c)$ – чыныгы чокулары, $B_1(o,b,o)$, $B_2(o,-b,o)$ – жорума чокулары;

$[A_1, A_2]$, $[C_1, C_2]$ – чыныгы октору, $[B_1, B_2]$ – жорума огу.

Бир көңдөйлүү гиперболоиддин окторунун кесилиши анын **борбору** деп аталат.

(27.2) бир көңдөйлүү гиперболоиди менен (xOz) тегиздигине параллель болгон тегиздиктин кесилиши эллипс болот; (xOy) тегиздигине параллель болгон тегиздик менен кесилиши гипербола болот; (yOz) тегиздигине параллель болгон тегиздик менен кесилиши гипербола болот.

Мисал 27.1. $x^2+2y^2+20y-z^2+34=0$ теңдемеси менен кайсы бет берилген?

Чыгаруу. Берилген теңдемени $x^2+2(y+5)^2-z^2=16$ көрүнүшүндө жазып алууга болот.

Мындан $\frac{x^2}{16}+\frac{(y+5)^2}{8}-\frac{z^2}{16}=1$ келип чыгат.

Бул болсо борбору $(0,-5,0)$ чекитинде, жарым октору $a=4,\ b=2\sqrt{2},\ c=4$ болгон бир көңдөйлүү гиперболоидди берет.

II. Эки көңдөйлүү гиперболоид

Аныктама 27.3. Гиперболаны чыныгы огунун айланасында айландыруудан пайда болгон бет **эки көңдөйлүү айлануу гиперболоиди** деп аталат.

Эгерде (xOy) координаттык тегиздигинде жаткан $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасын (Ox) огунун айланасында айландырсак, анда пайда болгон эки көңдөйлүү айлануу гиперболоиди

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (27.3)$$

теңдемеси менен берилет.

Аныктама 27.4. Эки көңдөйлүү айлануу гиперболоидин гипербола жаткан тегиздикке карата кысуудан пайда болгон бет **эки көңдөйлүү гиперболоид** деп аталат (27.3-сүрөт).

Эки көңдөйлүү гиперболоид $(Oxyz)$ координаталар системасына карата

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (27.4)$$

теңдемеси менен берилет.

Мында a – эки көңдөйлүү гиперболоиддин чыныгы жарым огу, b,c – жорума жарым огу;

$A_1(a,o,o)$, $A_2(-a,o,o)$ – чыныгы чокулары, $B_1(o,b,o)$, $B_2(o,-b,o)$, $C_1(o,o,c)$, $C_2(o,o,-c)$ – жорума чокулары;

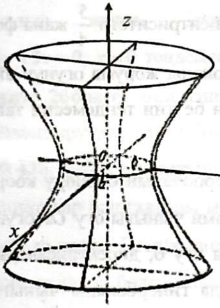
$[A_1,A_2]$ – чыныгы огу, $[B_1,B_2]$, $[C_1,\,C_2]$ – жорума октору.

Эки көңдөйлүү гиперболоиддин окторунун кесилиши анын **борбору** деп аталат.

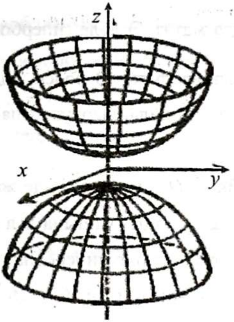
(27.4) эки көңдөйлүү гиперболоиди менен (xOz) тегиздигине параллель болгон тегиздиктин кесилиши гипербола болот; (xOy) тегиздигине параллель болгон тегиздик менен кесилиши гипербола болот; (yOz) тегиздигине параллель болгон тегиздик менен кесилиши эллипс болот.

Мисал 27.2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ эки көңдөйлүү гиперболоиди менен $y-6=0$ тегиздигинин кесилишинин жарым окторун тапкыла.

Чыгаруу. $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1\\ y-6=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1\\ y=6\end{cases} \Rightarrow -\frac{x^2}{20}+\frac{z^2}{80}=1$ – гипербола. $a=2\sqrt{5},\ b=4\sqrt{5}$.



27.1-сүрөт



27.3-сүрөт

№ 430. $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{3}=1$ гиперболасын (Oy) огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин жазгыла.

№ 431. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболасын (Oy) огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин жазгыла.

№ 432. Төмөнкү беттерди чийгиле:

1) $4x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 18 = 0$;

2) $12x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 24 = 0$;

3) $5x^2 - 3y^2 + 9z^2 - 30 = 0$;

4) $9x^2 - 8y^2 + 5z^2 + 40 = 0$;

5) $3x^2 + 4y^2 - 7z^2 - 14 = 0$.

№ 433. (yOz) тегиздигинде жаткан гиперболанын борбору координаталар башталышы менен дал келет, ал эми чоң огу (Oz) огунда жатат. Эгерде гиперболанын эксцентриситети $\frac{5}{4}$ жана фокалдык аралыгы 10 болсо, анда гиперболаны жорума огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 434. (xOz) тегиздигинде жаткан гиперболанын борбору координаталар башталышына дал келет, ал эми чыныгы огу Oz огунда жатат. Эгерде гиперболанын жорума огу 6, директрисаларынын арасындагы аралык 16 болсо, анда гиперболаны чыныгы огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 435. (yOz) тегиздигинде жаткан гиперболанын борбору координаталар башталышы менен дал келет, ал эми чыныгы огу (Oy) огунда жатат. Эгерде гиперболанын эксцентриситети $\frac{3}{2}$ жана директрисаларынын арасындагы аралык 8 болсо, анда гиперболаны чыныгы огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 436. (xOz) тегиздигинде жаткан гиперболанын борбору координаталар башталышы менен дал келет, ал эми жорума огу (Oz) огунда жатат. Эгерде гиперболанын директрисаларынын арасындагы аралык 6 жана фокалдык аралыгы 10 болсо, анда гиперболаны жорума огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 437. (xOy) тегиздигинде жаткан гиперболанын борбору координаталар башталышы менен дал келет, ал эми чыныгы огу (Ox) огунда жатат. Эгерде гиперболанын асимптоталары $4y+3x=0,\ z=0$ теңдемелери менен берилсе жана фокалдык аралыгы 20 болсо, анда гиперболаны чыныгы огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 438. (yOz) тегиздигинде жаткан гиперболанын борбору координаталар башталышы менен дал келет, ал эми жорума огу (Oy) огунда жатат. Эгерде гиперболанын чыныгы огу 12 жана эксцентриситети 2 болсо, анда гиперболаны чыныгы огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 439. $\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{12}=1$ гиперболасын айландыруудан пайда болгон бир көңдөйлүү айлануу гиперболоидинин теңдемесин жазгыла.

№ 440. $\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{2}=1$ гиперболасын айландыруудан пайда болгон эки көңдөйлүү айлануу гиперболоидинин теңдемесин жазгыла.

№ 441. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}=1$ бир көңдөйлүү гиперболоиди менен $z-2=0$ тегиздигинин кесилишинин жарым окторун жана борборун тапкыла.

№ 442. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}=1$ бети менен $x+4=0$ тегиздигинин кесилишин тапкыла.

№ 443. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ бети менен $z-8=0$ тегиздигинин кесилишин тапкыла.

№ 444.

1) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=1$ бети менен $\begin{cases} x=t+3, \\ y=t+1, \\ z=3t+6. \end{cases}$ түз сызыгынын;

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$ бети менен $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$ түз сызыгынын кесилиш чекиттерин тапкыла.

№ 445. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{2}=1$ бетинин $M(1,-4,2)$ чекити аркылуу өткөн диаметринин узундугун тапкыла.

№ 446. Төмөнкү беттердин борборунун координаталарын жана жарым окторун тапкыла:

1) $2x^2-4y^2+3z^2-4x+12y-18z+9=0;$

2) $3x^2+2y^2-5z^2-6y+10z-7=0;$

3) $4x^2+5y^2-6z^2+8x+20y-18z-1=0;$

4) $2x^2+7y^2-6z^2+12x-14y+24=0;$

5) $4x^2-5y^2+4z^2-8x+20y-12z-1=0;$

6) $3x^2-2y^2+z^2+6x-12y+6z=0.$

§28. Параболоиддер

I. Эллиптикалык параболоид

Аныктама 28.1. Параболаны факалдык огунун айланасында айландыруудан пайда болгон бет **эллиптикалык айлануу параболоиди** деп аталат.

Эгерде (xOz) координаттык тегиздигинде жаткан $x^2=2pz$ параболасын (Oz) огунун айланасында айландырсак, анда пайда болгон эллиптикалык айлануу параболоиди

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}+=2z \tag{28.1}$$

теңдемеси менен берилет.

Аныктама 28.2. Эллиптикалык айлануу параболоидин парабола жаткан тегиздикке карата кысуудан пайда болгон бет **эллиптикалык параболоид** деп аталат (28.1- сүрөт).

Эллиптикалык параболоид $(Oxyz)$ координаталар системасына карата

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p\neq 0,\ q\neq 0) \tag{28.2}$$

теңдемеси менен берилет.

Координаталар башталышы эллиптикалык параболоиддин чокусу болуп саналат.

(xOy) тегиздигине параллель болгон тегиздиктердин эллиптикалык параболоид менен кесилиши эллипс болот; башка координаттык тегиздиктерге параллель болгон тегиздиктер менен эллиптикалык параболоиддин кесилиши парабола болот.

Эллиптикалык параболоидди төмөндөгүчө да алууга болот:

Жалпы чокусу O болгон кыймылсыз $y^2 = 2qz$ жана кыймылдуу $x^2 = 2pz$ $(p > 0,\ q > 0)$ параболалары берилсин. Кыймылдуу параболаны кыймылсыз парабола боюнча кыймылга келтирүүдө эллиптикалык параболоидге ээ болобуз.

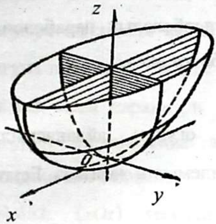
II. Гиперболалык параболоид

Эгерде жогорудагы кыймылсыз $y^2 = 2qz$ жана кыймылдуу $x^2 = 2pz$ параболаларында p жана q сандары карама-каршы белгиде болушса, анда **гиперболалык параболоидге** ээ болобуз (28.2-сүрөт).

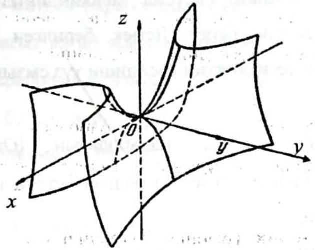
Гиперболалык параболоид $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ же

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \qquad (28.3)$$

теңдемеси менен берилет.



28.1-сүрөт



28.2-сүрөт

Мисал 28.1. $x^2+y^2-6x+60y-4z+18=0$ теңдемеси менен кайсы бет берилген?

Чыгаруу. Берилген теңдемени төмөндөгүдөй көрүнүшүндө жазып алууга болот:

$$(x-3)^2+(y+3)^2-4z=0, \quad \frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(y+3)^2}{2}=2z.$$

Демек, берилген бет эллиптикалык айлануу параболоиди болот.

Мисал 28.2. $z=x^2-4y^2$ гиперболалык параболоиди менен $x+2y-3=0$ тегиздигинин кесилишин тапкыла.

Чыгаруу. Берилген гиперболалык параболоиддин теңдемесин төмөндөгүдөй көрүнүштө жазып алалы:

$$z=(x+2y)(x-2y)$$

$$\begin{cases} x+2y-3=0, \\ z=(x+2y)(x-2y). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3, \\ 3(x-2y)=z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3=0, \\ 3x-6y-z=0. \end{cases}$$

Акыркы система мейкиндиктеги түз сызыктын жалпы теңдемесин берет. Демек, берилген гиперболалык параболоид менен тегиздиктин кесилиши түз сызык болот экен.

№ 447. $y^2 = 8z$ параболасын (Oz) огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин жазгыла. Бетти чийгиле.

№ 448. Төмөнкү беттерди чийгиле:

1) $4x^2 + 3y^2 - 24z = 0;$ **2)** $3x^2 + 5y^2 + 30z = 0;$

3) $x^2 + 4z^2 - 8y = 0;$ **4)** $9x^2 - 4y^2 + 8z = 0;$

5) $12x^2 - 2y - 5z^2 = 0;$ **6)** $2x^2 - 7y^2 + 4z^2 = 0;$

7) $9x^2 + 18y + 6z^2 = 0.$

№ 449. (xOy) тегиздигинде жаткан праболанын чокусу координаталар башталышы менен дал келет жана фокусу (Ox) огунун оң жагында жатат. Эгерде парабола $M(2,4,0)$ чекити аркылуу өтсө, анда параболаны (Ox) симметрия огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 450. (yOz) тегиздигинде жаткан параболанын чокусу координаталар башталышы менен дал келет. Эгерде параболанын фокусу $F(0,3,0)$ чекитинде жатса, анда параболаны (Oy) симметрия огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 451. (xOz) тегиздигинде жаткан параболанын бутактары (Ox) огунун оң жагын карай багытталган жана симметрия огу (Ox) огуна параллель. Эгерде параболанын чокусу $C(2,0,3)$ чекитинде жатса жана параметри 5 болсо, анда параболанын симметрия огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 452. (xOz) тегиздигинде жаткан параболанын борбору координаталар башталышы менен дал келет жана бутактары (Oz) огунун сол жагын карай багытталган. Эгерде парабола $M(6,0,-4)$ чекити аркылуу өтсө, анда параболаны (Oz) симметрия огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 453. (yOz) тегиздигинде жаткан параболанын бутактары (Oz) огунун оң жагын карай багытталган жана симметрия огу (Oz) огуна параллель. Эгерде параболанын чокусу $C(0,2,1)$ чекитинде жатса жана парабола $M(0,4,5)$ чекити аркылуу өтсө, анда параболаны симметрия огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин тапкыла.

№ 454. $y^2 = 2pz$ параболасын (Oz) огунун айланасында айландыруудан пайда болгон беттин теңдемесин жазгыла. Пайда болгон параболоид **1)** $A(1,2,-1)$ **2)** $B(5,3,2)$ **3)** $C(2,5,1)$ чекиттери аркылуу өтө тургандай p ны тапкыла.

№ 455. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$ эллиптикалык параболоиди менен $z-3=0$ тегиздигинин кесилишинин жарым окторун жана борборунун координаталарын тапкыла.

№ 456. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=2z$ эллиптикалык параболоиди менен (xOy) тегиздигинин кесилишин тапкыла.

№ 457. $9x^2-4y^2=2z$ гиперболалык параболоиди менен (xOy) тегиздигинин кесилишин тапкыла.

№ 458. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=2z$ гиперболалык параболоиди менен $z-4=0$ тегиздигинин кесилишин тапкыла. Кеслиштин жарым окторун, борборун жана чокуларынын координаталарын тапкыла.

№ 459. $9x^2-4y^2=2z$ бети менен (xOy) тегиздигинин кесилишин тапкыла.

№ 460.

1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=z$ бети менен $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ түз сызыгынын;

2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$ бети менен $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ түз сызыгынын кесилиш чекиттерин тапкыла.

§29. Экинчи тартиптеги беттердин түз сызыктуу түзүүчүлөрү

Аныктама 29.1. Бетте жаткан түз сызык беттин **түз сызыктуу түзүүчүсү** деп аталат.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – бир көңдөйлүү гиперболоиди эки топтогу түз сызыктуу түзүүчүлөрүнө ээ жана алар төмөндөгү теңдемелери менен берилишет:

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)m_1=\left(1-\frac{y}{b}\right)n_1,\\ \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)n_1=\left(1+\frac{y}{b}\right)m_1,\end{cases} \tag{29.1}$$

мында m_1 жана n_1 – бир учурда нөлгө барабар болбогон турактуу сандар;

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)m_2=\left(1+\frac{y}{b}\right)n_2,\\ \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)n_2=\left(1-\frac{y}{b}\right)m_2,\end{cases} \tag{29.2}$$

мында m_2 жана n_2 – бир учурда нөлгө барабар болбогон турактуу сандар.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ – гиперболалык параболоиди эки топтогу түз сызыктуу түзүүчүлөрүнө ээ жана алар төмөндөгү теңдемелери менен берилишет:

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)m_1=n_1,\\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)n_1=zm_1,\end{cases} \tag{29.3}$$

мында m_1 жана n_1 – бир учурда нөлгө барабар болбогон турактуу сандар;

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)m_2 = zn_2,\\[2mm] \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)n_2 = m_2,\end{cases} \tag{29.4}$$

мында m_2 жана n_2 – бир учурда нөлгө барабар болбогон турактуу сандар.

Мисал 29.1. $16x^2+36y^2-9z^2=144$ бир көңдөйлүү гиперболоидинин (Oy) огуна параллель болгон түз сызыктуу түзүүчүлөрүн тапкыла.

Чыгаруу. Бир көңдөйлүү гиперболоиддин теңдемесин

$$(4x-3z)(4x+3z)=(12-6y)(12+6y)$$

көрүнүшүнө келтирип, түз сызыктуу түзүүчүлөрүнүн эки тобунун (29.1) теңдемелерин жазалы:

$$L_1:\begin{cases}m_1(4x-3z)=n_1(12-6y),\\ n_1(4x+3z)=m_1(12+6y);\end{cases}$$

$$L_2:\begin{cases}m_2(4x-3z)=n_2(12+6y),\\ n_2(4x+3z)=m_2(12-6y).\end{cases}$$

Биз түз сызыктуу түзүүчүлөр (Oy) огуна перпендикуляр боло тургандай m_1, m_2, n_1, n_2 сандарын табышыбыз керек. Ал үчүн бул түз сызыктардын багыттоочу векторлорун табабыз.

$$L_1:\begin{cases}4m_1x+6n_1y-3m_1z-12n_1=0,\\ 4m_1x-6n_1y+3m_1z-12m_1=0.\end{cases}$$

Анда

$$\overline{l_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & 4m_1 & 4n_1 \\ \bar{j} & 6n_1 & -6m_1 \\ \bar{k} & -3m_1 & 3n_1 \end{vmatrix} = 18\left(n_1^2 - m_1^2\right)\bar{i} - 24m_1n_1\,\bar{j} - 24\left(n_1^2 + m_1^2\right)\bar{k}.$$

Демек, $\overline{l_1} = \left(18\left(n_1^2 - m_1^2\right), -24m_1n_1, -24\left(n_1^2 + m_1^2\right)\right)$. $\overline{l_1} \perp (Oy)$ болушун талап кылалы, анда, б.а.

$$\overline{l_1} \cdot \bar{j} = 0 \Leftrightarrow -24m_1n_1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = 0,\ n_1 \neq 0 - \textit{каалагандай сан}, \\ n_1 = 0,\ m_1 \neq 0 - \textit{каалагандай сан}. \end{array}\right.$$

Бул маанилерди L_1 дин теңдемесине алып барып коелу:

$$(l_1)_1 : \begin{cases} 6m_1y - 12n_1 = 0, \\ 4n_1 + 3m_1z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = 0, \\ 4x + 3z = 0 \end{cases} \text{ жана}$$

$$(l_1)_2 : \begin{cases} 4m_1x - 3n_1z = 0, \\ -6m_1y - 12m_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3z = 0, \\ y + 2 = 0. \end{cases}$$

L_2 тобунун теңдемелери ушул сыяктуу табылат.

№ 461. $A(4,0,2)$ чекити аркылуу өтүп, толугу менен $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{16} = 2z$ бетиндеги жаткан түз сызыктарды тапкыла.

№ 462. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ бетинин $(6,2,8)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктуу түзүүчүлөрүн тапкыла.

№ 463. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ бетинин $2x + 3y - 11 = 0$ тегиздигине параллель болгон түз сызыктуу түзүүчүлөрүн тапкыла.

№ 464. $16x^2+36y^2-9z^2=144$ теңдемеси менен берилген бир көңдөйлүү гиперболоиддин (Oy) огуна перпендикуляр болгон түз сызыктуу түзүүчүлөрүн тапкыла.

№ 465. $x^2+y^2-z^2=1$бир көңдөйлүү гиперболоидинин (1,0,0) чекити аркылуу өткөн түз сызыктуу түзүүчүлөрүн тапкыла.

№ 466. $x^2-y^2=4z$ гиперболалык параболоидинин $x+y+z-11=0$ тегиздигине параллель болгон түз сызыктуу түзүүчүлөрүн тапкыла.

№ 467. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=z$ бетинин $(10,-4,3)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктуу түзүүчүлөрүн тапкыла.

№ 468. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ бетинин $3x+2y-4z+13=0$ тегиздигине параллель болгон түз сызыктуу түзүүчүлөрүн тапкыла.

Жооптор:

№ 1. **1)** 18; **2)** 26; **3)** 1; **4)** 0; **5)** 0; **6)** 0; **7)** 4a; **8)** 1. **№ 3.** **1)** 25; **2)** 9; **3)** 60; **4)** 0; **5)** 10; **6)** 0; **7)** $2(1-a^2)$; **8)** $(m-n)(n-p)(p-m)$; **9)** 0.

№ 4. **1)** $x=2,\ x=3$; **2)** $x=-1$, $x=2$. **№ 5.** **1)** $x<3,5$; **2)** $-6\le x\le 4$.

№ 13. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. **№ 16.** $\overline{OM}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. **№ 17.** **1)** $\overline{AB}=\overline{DC}$; **3)** $\overline{AO}=\overline{OC}$.

№ 19. $\overline{AD}=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$. **№ 20.** $\bar{0}$. **№ 22.** $\overline{A'B'}=\vec{p}$, $\overline{A'D'}=\vec{q}$, $\overline{A'C'}=\vec{p}+\vec{q}$, $\overline{A'B}=\vec{p}-\vec{r}$, $\overline{A'D}=\vec{q}-\vec{r}$, $\overline{A'C}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}$.

№ 23. $\overline{MN}=\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}$, $\overline{PQ}=\frac{\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}}{2}$, $\overline{RS}=\frac{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}{2}$.

№ 24 **1)** (-23, 18); **2)** (-23, 13). **№ 25** **1)** $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$; **2)** $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$; **3)** $c=-\frac{3}{2}\vec{a}$. **№ 26** (0,6;-0,8), (-0,6; 0,8). **№ 27** $\left(\frac{3}{\sqrt{130}},\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$. **№ 28** $\vec{b}=(-2,-5)$. **№ 29.** **1)** $t=0$; **2)** $t_1=1$, $t_2=-1$; **3)** t нын эч кандай маанисинде $\vec{a}$ менен $\vec{b}$ векторлору коллинеардуу эмес. **№ 30** $\overline{AK_1}\left(\frac{3}{2},2\right)$, $\overline{BK_2}\left(0,-\frac{3}{2}\right)$, $\overline{CK_3}\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$. **№ 31** $\vec{a}\parallel\vec{c}$ жана $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}=\bar{0}$ болгондуктан *ABCD* трапециясы табылат. **№ 32.** $\overline{AD}=(1,-1)$, $\overline{BC}=\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\overline{CD}=\left(-\frac{1}{2},1\right)$, $\overline{DE}=(-1,1)$, $\overline{EF}=\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $\overline{FA}=\left(\frac{1}{2},-1\right)$, $\overline{AC}=\left(\frac{3}{2},-1\right)$. **№ 33.** **1)** $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ – Сызыктуу көз каранды эмес; **2)** $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ – сызыктуу көз каранды;

$\bar{c}=\frac{1}{2}\bar{a}+\frac{2}{3}\bar{b}$; **3)** $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$-сызыктуу көз каранды. Бирок $\bar{c}$ вектору жана $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ векторлору аркылуу сызыктуу туюнтулбайт, себеби $\bar{a}\parallel\bar{b}$ жана $\bar{c}$ аларга коллинеардуу эмес. **№ 35.** $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$. **№ 36 1)** 20; **2)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **3)** 0; **4)** 18; **5)** -3. **№ 37 1)** -62; **2)** 162; **3)** 373. **№ 38** Параллелограммдын жактарынын квадраттарынын суммасы анын диагоналдарынын квадраттарынын суммасына барабар. **№ 39** $-\frac{3}{2}$. **№ 40** $\alpha=\pm\frac{3}{5}$. **№ 41.** $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$. **№ 42.** 8. **№ 43.** $\cos\varphi=\frac{2}{7}$. **№ 44.** 120^0. **№ 45.**. **№ 46.** $\sqrt{17}$. **№ 47.** $m=-6$. **№ 48.** 8. **№ 49. -4. № 50. 1)** $(21,42,21)$; **2)** 280; **3)** $(115,242,137)$. **№ 51.** $\left(\frac{6}{5\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{8}{5\sqrt{5}}\right)$. **№ 53. 1)**$(-7,-1,3)$; **2)** $(3,8,3)$; **3)** $(2,5,18)$; **4)** $(-10,-8,38)$;. **5)** $(-11,-2,37)$. **№ 55.**$\alpha=\frac{3}{2},\beta=\frac{1}{2}$. **№58.** $\bar{b}\perp\bar{a}$ же $\bar{b}\perp\bar{c}$ болгондо; **№ 59.** $18\sqrt{2}$. **№60.** $50\sqrt{2}$. **№ 61. 1)** 24,5; **2)** $\frac{\sqrt{2331}}{2}$; **3)** $3\sqrt{10}$; **4)** $\frac{\sqrt{1326}}{2}$. **№ 62.** $\frac{9}{4}\sqrt{6}$. **№ 63. Көрсөтмө:** $\overline{NQ}$, $\overline{LN}$ векторлорун $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ векторлору аркылуу туюнтуу керек. **№ 66** $t=-1$. **№ 67.** $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=24$. **№ 68.** $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\pm27$. **№ 70.** 6. **№ 73. 1)** $S_1(-2,7)$, $S_2(4,1)$, $S_3(2,-3)$; **2)** $S_1(1,-2)$, $S_2(7,0)$, $S_3(-3,2)$. **№ 74.** $(14,0)$ жана $\left(0,\frac{14}{3}\right)$. **№ 76.**

$\left(\frac{1}{4},\frac{11}{4}\right)$. **№ 78.** $5\sqrt{2}$. **№ 79.** $\frac{\sqrt{157}}{2}$ **№ 80.** $AD=\frac{10}{3}\sqrt{2}$. **Көрсөтмө:** үч бурчтуктун тик бурчтуу экендигин пайдаланып, D чекитинин координаталарын табуу керек. **№ 81.** Маселенин шартын канааттандыруучу $ABCD$ жана $A'B'C'D'$ эки квадрат жашайт: $C(1,8)$, $D(-4,6)$, $C'(5;-2)$, $D'(0,-4)$. **№ 82.** 180кв.бирд. **№ 83. 1)** $\left(3,\frac{3}{2}\right)$, **2)** $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$. **№ 84.** $(2;1)$. **№ 85.** $A(7,4)$, $B(3,2)$, $C(-5,8)$. **№ 86.** $O(5,2)$. **№ 87.** $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. **№ 88.** а) $P(1,-1)$, б) $Q(10,17)$. **№ 89**: $P\left(\frac{119}{27},\frac{55}{18}\right)$. **№ 90.** $O\left(1,\frac{4}{3}\right)$. Көрсөтмө: (Ox)огун кичине катет боюнча багыттагыла. **№ 91.** $\left(\frac{41}{5};\frac{31}{5}\right)$. **Көрсөтмө:** төрт бурчтукту 2 үч бурчтукка бөлүп, алардын аянттарын эсептегиле жана оордук борборун тапкыла. Бул оордук борборлорго үч бурчтуктардын аянттарына пропорционалдуу болгон массаны орноткула. Ошентип, мисал эки материалдык чекиттин оордук борборун табуу маселесине келет. **№ 92.** $(2,-1)$; $(3,1)$. **№ 93.** $\sqrt{34}$; $\sqrt{21}$. **№ 94.** $r=\sqrt{26}$. **№ 95.** $\left(\frac{5}{6},0,-\frac{7}{6}\right)$ **№ 96.** (4, 3, 3). **№ 97.** $C(7,-3,-2)$. **№ 98.** 45^0 же 135^0. **№ 99.** $M_1(4\sqrt{2},4,4)$, $M_2(4\sqrt{2},-4,4)$. **№ 100. 1)** $x=x'+3$, $y=y'+4$; **2)** $x=x'-2$, $y=y'+1$; **3)** $x=x'-3$, $y=y'+5$. **№ 101.** $A(4,1)$, $B(0,-4)$, $C(2,0)$. **№ 102. 1)** $A(0,0)$, $B(-3,2)$, $C(-4,4)$; **2)** $A(3,-2)$, $B(0,0)$, $C(-1,2)$; **3)** $A(4,-4)$, $B(1,-2)$, $C(0,0)$. **№ 103. 1)** $(3,5)$, **2)**

$(-2,1)$,**3)** $(0,-1)$, **4)** $(-5,0)$. **№ 104. 1)** $x=\frac{x'-y'\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{x'\sqrt{3}+y'}{2}$; **2)** $x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}$; **3)** $x=-y'$, $y=x'$; **4)** $x=y', y=-x'$; **5)** $x=-x', y=-y'$. **№ 105.** $A(3\sqrt{3},1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, $C(3,-\sqrt{3})$. **№ 106. 1)** $M(\sqrt{2},2\sqrt{2})$, $N(-3\sqrt{2},2\sqrt{2})$, $P(-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$; **2)** $M(1,-3)$, $N(5,1)$, $P(-1,3)$; **3)** $M(-1,3)$, $N(-5,-1)$, $P(1,-3)$; **4)** $M(-3,-1)$, $N(-1,-5)$, $P(3,1)$. **№ 107. 1)** 60^0; **2)**-30^0. **№ 108.** $O'(2,-4)$. **№ 109.** $A(6,3)$, $B(0,0)$, $C(5,-10)$. **№ 110. 1)** $O'(3,-2), \alpha=90^0$; **2)** $O'(-1,3), \alpha=180^0$; **3)** $O'(5,-3), \alpha=-45^0$. **№ 111.** $x=-x'+1$, $y=-y'+1$, $z=-z'+1$. **№ 112. 1)** $x=2x'+z'+2$, $y=4x'+4y'+z'+1$, $z=x'+4y'+3$; **2)** $x'=-x+y-z+4$, $y'=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{7}{4}$, $z'=3x-2y+2z-10$; **3)** $O\left(4,-\frac{7}{4},-10\right)$, $\overline{e_1}=\left(-1,\frac{1}{4},3\right)$, $\overline{e_2}=\left(1,-\frac{1}{4},-2\right)$, $\overline{e_3}=\left(-1,\frac{1}{2},2\right)$. **№ 113. 1)** $x'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$, $y'=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}$, $z'=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}$; **2)** $O'(-1,0,1)$, $\overrightarrow{e_1'}=(-2,0,1)$, $\overrightarrow{e_2'}=(-1,-1,3)$, $\overrightarrow{e_3'}=(-1,-1,1)$; **3)** $O\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, $\overline{e_1}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$, $\overline{e_2}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{5}{4}\right)$, $\overline{e_3}=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. **№ 115.** $A(1,\sqrt{3})$, $B(-1,1)$, $C(0,5)$, $D\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$. **№ 116.** $A\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$,

$B\left(2,\frac{2\pi}{2}\right)$, $C(5,0)$. **№ 117.** $(a,0)$, $\left(a\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2a,\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(a\sqrt{3},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(a,\frac{2\pi}{3}\right)$. **№ 118. 1)** $\sqrt{3}$; **2)** 10; **3)** 5. **№ 119.** $\left(1,-\frac{2\pi}{3}\right)$. **№ 120. 1)** $B\left(5,\frac{5\pi}{3}\right)$; **2)** $C\left(5,\frac{4\pi}{3}\right)$. **№ 121.** $A\left(2,\frac{17\pi}{12}\right)$, $B\left(3,\frac{7\pi}{12}\right)$, $C\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$, $D\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(5,\frac{5\pi}{4}\right)$. **№ 122.** $S=1$. **№ 123.** $\left(2+5\sqrt{3},8\right)$. **№ 124.** $M\left(6\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$, $N\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$. **№ 125. 1)** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-4}$, **2)** $\begin{cases} x=2+t, \\ y=3-4t; \end{cases}$ **3)** $4x+y-11=0$. **№ 126** A_1, A_4, A_5, A_6. **№ 127.** $(1,0)$, $(0,\frac{1}{3})$, $(4,-1)$,$(-5,2)$. **№ 128. 1)** $\vec{a}(2,1)$; **2)** $\vec{a}(-4,5)$; **3)** $\vec{a}(1,7)$; **4)** $\vec{a}(2,1)$; **5)** $\vec{a}(4,2)$. **№ 129.** $3x+2y=0$. **№ 130.** $3x+7y+29=0$, $k=-\frac{3}{7}$. **№ 131.** $\begin{cases} x=1+7t, \\ y=2+3t. \end{cases}$ **№ 132.** $2x+3y-7=0$. **№ 133.** $3x+4y-16=0$, $5x+3y-1=0$, $2x-y-7=0$. **№ 134.** $7x-y+3=0$. **№ 135. 1)** жатат; **2)** жатпайт. **№ 136 1)** $4x-y=0$, **2)** $11y-16=0$, **3)** $11x-4=0$, **4)** $17x-40y+52=0$. **№ 137.** $2x-y-5=0$. **№ 138. 1)** $2x-3y+9=0$; **2)** $3x-y=0$; **3)** $y+2=0$; **4)** $x+3y-2=0$. **№ 139. 1)** $k=5,\ b=3$; **2)** $k=-\frac{2}{3},\ b=2$; **3)** $k=-\frac{5}{3},\ b=-\frac{2}{3}$; **4)** $k=-\frac{3}{2},\ b=0$; **5)** $k=0,\ b=3$. **№ 140. 1)** $k=-\frac{5}{3}$; **2)** $k=\frac{3}{5}$. **№ 141. 1)** $x-\sqrt{3}y=0$; **2)** $x-y=0$; **3)** $\sqrt{3}x-y=0$; **4)** $\sqrt{3}x+y=0$; **5)** $x+y=0$; **6)** $x+\sqrt{3}y=0$. **№ 142.** $(6,0)$,

$2x+3y-12=0$. **№ 143. 1)** $2x+y-1=0$; **2)** $x+y-15=0$; **3)** $3x+2y=0$. **№ 144.** AE: $2x-5y+4=0$, $AK: x-2y+2=0$, $|AE|=29$. **№ 145. 1)** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$; **2)** $\frac{x}{-4/3}+\frac{y}{2}=1$. **№ 146.** $x+y-7=0$. **№ 147. 1)** $\frac{x}{\sqrt{17}}+\frac{4y}{\sqrt{17}}-\frac{7}{\sqrt{17}}=0$; **2)** $\frac{3x}{5}+\frac{4y}{5}-3=0$; **3)** $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-3=0$; **4)** $\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y=0$; **5)** $x+5=0$. **№ 149.** $2x-5y+29=0$. **№ 150.** $2x-4y-21=0$. **№ 151.** $2x-2y+\sqrt{2}a=0$, $2x+2y-\sqrt{2}a=0$, $2x-2y-\sqrt{2}a=0$, $2x+2y+\sqrt{2}a=0$. **№ 153. 1)** координата башталышы аркылуу өтөт; **2)** координата октору $M(3,0)$ жана $N(0,-2)$ чекиттеринде кесип өтөт; **3)** (Oy) огуна параллель; **4)** (Ox) огуна параллель; **5)** (Oy) огу менен дал келет;**6)** (Ox) огу менен дал келет. **№ 154.** (0,-4), (6,0). **№ 155. 1)** кесилишет; **2)** параллель. **№ 156. 1)** өтөт; **2)** өтпөйт. **№ 157.** $x+4y-4=0$. **№ 159.** A(2,-1) B(-1,3) C(2,4). **№ 160.** (1,-3), (-2,5), (5,-9) жана (8,-17). **№ 161.** (1, -1), ($\frac{8}{3}$, -2). **№ 162.** $(2;-1)$. **№ 163. 1)** $3x+2y-7=0$; **2)** $y-2=0$; **3)** $x-1=0$; **4)** $4x+3y-10=0$. **№ 164.** $2x-5y-2=0$. **№ 165.** Кесип өтөт. **№ 166.** $m=\frac{7}{12}$. **№ 167.** $p=-7$. **№ 169.** үч бурчтукка карата сырткы чекит. **№ 170.** 1,8. **№ 171.** 2,5. **№ 172.** $3x-4y-25=0$; $3x-4y+5=0$. **№ 173.** (-3,2). **№ 174.** ($\frac{8}{5}$,0) жана (0,-8). **№ 175.** $S=17$. **№ 176.** $S=49$. **№ 178.** 5. **№ 180.** 2 : 3. **№ 181.** 4. **№ 182.** $3x-y+1=0$. **Чыгаруу.** Түз сызыктардын боосунун берилген $\alpha(2x+y+4)+\beta(x-2y-3)=0$ теңдемесин жөнөкөйлөштүрүп алалы:

$$(2\alpha+\beta)x+(2\alpha-\beta)y+(4\alpha-3\beta)=0.$$

Берилген $(2,-3)$ чекитинен акыркы теңдеме менен аныкталган түз сызыкка чейинки аралык (11.1) формула боюнча $d=\dfrac{|(2\alpha+\beta)2+(2\alpha-\beta)(-3)+(4\alpha-3\beta)|}{\sqrt{(2\alpha+\beta)^2+(2\alpha-\beta)^2}}=\sqrt{10}$ болот. Бул барабардыкты жөнөкөйлөштүрүп, $\alpha=\beta$ экендигине ээ болобуз. Берилген теңдемедеги β нын ордуна α ны коюп, барабардыктын эки жагын тең α га кыскартабыз. Натыйжада берилген $(2,-3)$ чекитинен $\sqrt{10}$ аралыкта турган берилген боодогу жалгыз $3x-y+1=0$ түз сызыгына ээ болобуз. **№ 183.** $x+16y-39=0, 8x-2y-3=0$. **№ 184.** $8x+4y-5=0$. **№ 185.** $7x+56y-40=0$. **№ 186.** $x+y+5=0$. **№ 188.** $3x-5y-57=0$. **№ 189.** $4x+7y-39=0$. **№ 190.** $x+2y-5=0$ жана $x-6y+11=0$. **№ 191.** $x+4y-3=0$. **№ 192.** $22x+33y-35=0$, $5x-y+3=0$, $17x+34y-38=0$. **№ 193.** **1)** $\frac{\pi}{4}$; **2)** $\frac{\pi}{2}$. **№ 194.** **1)** 135°; **2)** 45°; **3)** 150°. **№ 195.** $tgA=\frac{4}{3}$, $tgB=tgC=2$, $S=16$. **№ 198.** N,Q чекиттери жатат. **№ 199.** $(-2,0,3)$, $(4,0,9)$, $(0,0,5)$, $(1,0,6)$. **№ 200.** **1)** жок; 2) ооба, $x+y+z-2=0$; 3) жок; 4) жок. **№ 201.** $M_1(3,0,0)$, $M_2(0,-6,0)$, $M_3(0,0,2)$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=1$; $\frac{2}{\sqrt{14}}x-\frac{1}{\sqrt{14}}y+\frac{3}{\sqrt{14}}z-\frac{6}{\sqrt{14}}=0$;

$N_1(2,0,0)$, $N_2(0,5,0)$, $N_3(0,0,2)$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=1$;

$\frac{5}{\sqrt{54}}x+\frac{2}{\sqrt{54}}y+\frac{5}{\sqrt{54}}z-\frac{10}{\sqrt{54}}=0$;

$P_1(-4,0,0)$, $P_2(0,-2,0)$, $P_3(0,0,-1)$, $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{-1}=1$;

$-\frac{1}{\sqrt{21}}x+\frac{2}{\sqrt{21}}y-\frac{4}{\sqrt{21}}z-\frac{4}{\sqrt{21}}=0$; $Q_1(-2,0,0)$, $Q_2(0,-2,0)$,

$Q_3(0,0,-2)$, $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{-2}=1$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{2}{\sqrt{3}}=0$.

№ 202.1). $x+4y+7z+16=0$; **2)** $x+3y-z+1=0$

№ 203. 1) $x-y-z=0$; **2)** $x-z+1=0$.

№ 204. 1) $3x+3y+z-8=0$; **2)** $x+y-4z+9=0$.

№ 205. 1) $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$; **2)** $\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$. **№ 206. 1)** $(1,5,-1)$; **2)** $(4,-3,5)$

№ 207. 1) $3y-4z=0$; **2)** $4x-2y-z-13=0$.

№ 208. 1) $4x-y-2z-9=0$; **2)** $3x+y-3z+7=0$

№ 209. $7x-y+5z=0$.

№ 210. 1) кесилишет; **2)** кесилишет; **3)** параллель; **4)** кесилишет; **5)** дал келишет. **№ 212. 1)** $l=3, m=-4$; **2)** $l=3, m=-\frac{2}{3}$; **3)** $l=-3\frac{1}{3}, m=-1\frac{1}{5}$. **№ 213. 1)** $l=12$; **2)** $l=-19$;**1)** $l=-\frac{1}{7}$. **№ 214.** A, B – тегиздикте; D,E – тегиздиктин бир жагында, C, F – тегиздиктин эки башка жагында жатышат. **№ 215.** Кесип өтөт. **№ 216. 1)** $2x-3z-27=0$; **2)** $x-2y+4z-17=0$ **3)** $z-3=0$; **4)** $y+2=0$; **5)** $x+5=0$. **№ 217. 1)** $2y+z=0$; **2)** $3x+z=0$; **3)**

$4x+3y=0$. **№ 218.** **1)** $y+4z+10=0$; **2)** $x-z-1=0$; **3)** $5x+y-13=0$. **№ 219.** $(1,-2,2)$. **№ 224.** $l=-5$, $m=-11$. **№ 225.** **1)** $l\neq 7$; **2)** $l=7$, $m=3$; **3)** $l=7$, $m\neq 3$. **№ 226.** $\mu=\frac{13}{3}$, $\nu=\frac{23}{3}$. **№ 227.** **1)** $\varphi=\arccos 0{,}7$; **2)** тегиздиктер бири-бири менен перпендикуляр, $\varphi=90^0$; **3)** тегиздиктер бири-бири менен параллель, $\varphi=0^0$; **4)** $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{5}}{6}$. **№ 228.** $\varphi=\frac{\pi}{3}$. **Көрсөтмө:** Изделүүчү бурч берилген тегиздиктин перпендику-ляры менен (Ox) огунун арасындагы бурчка барабар. **№ 229.** $\varphi=\arccos\frac{4}{13}$. **№ 230.** $x+3y=0$ жана $3x-y=0$. **№ 231.** $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$. **№ 232.** **1)** 6, $2)\frac{9}{7}$. **№ 233** $\frac{\sqrt{30}}{6}$ **№ 234.** $18\frac{1}{3}$. **Көрсөтмө:** (11.4) формуласын пайдалангыла. **№ 235.** $A_1(0,0,-3)$, $A_2(0,0,15)$ **№ 236.** $6x+3y-2z-36=0$, $6x+3y-2z+62=0$. **№ 237.** $x+3y-3z-9=0$. **№ 238.** $P(-12,-4,18)$. **Көрсөтмө**: Берилген чекитти радиус-вектору $(r=2p)$ жана анын багыттоочу косинустарынын жардамында табууга болот. Мында радиус-вектор берилген тегиздикке перпендикуляр. **№ 239.** $6x+2y+3z\pm 42=0$. **№ 240.** **Ооба.** **№ 241.** Ооба. **№ 242.** $x=0$, $z=0$. **№ 243.** **1)** $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-1}{5}$; **2)** $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-2}$. **№ 244.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{-2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\chi=-\frac{2}{3}$.

№ 245. $\begin{cases} x=3-3t,\\ y=2-9t,\\ z=1-6t.\end{cases}$ **№ 247.** $(2,-1,0)$, $\left(\frac{4}{3},0,-\frac{1}{3}\right)$, $(0,2,-1)$. **№ 248. 1)** $t=-4$; **2)** $t=9$; **3)** $t=3$. **№ 250.** $\frac{x-2}{-4}=\frac{y-3}{8}=\frac{z+5}{10}$. **№ 251.** Мисалы, $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{8}$. **№ 252.** $\begin{cases} x=1+t,\\ y=-7t,\\ z=-2-19t.\end{cases}$ **№ 253.** $\frac{x+4}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}$. **№ 256. 1)** параллель; **2)** дал келишет; **3)** кесилишет; **4)** параллель; **5)** кайчылаш. **№ 258.** $m=3$. **№ 259.** $\sqrt{22}$. **№ 260.** 6. **№ 261.** 90^0. **№ 263.** $\left(1\frac{1}{7},-\frac{5}{7},\frac{6}{7}\right)$. **№ 265.** $4x+6y+5z-1=0$. **№ 266.** $6x-20y-11z+1=0$. **№ 269. 1)** $x-10y-8z-3=0$; **2)** $x+y-z+2=0$; **3)** $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$; **4)** $11x-2y-15z-3=0$. **№ 270.** $t=-2$. **№ 272.** $\alpha=\frac{3}{2}\beta$. Мисалы, $\alpha=3, \beta=2$. **№ 273. 1)** $\arcsin\frac{38}{15\sqrt{14}}$; **2)** $\arcsin\frac{17}{\sqrt{253}}$. **№ 274. 1)** $(x+2)^2+(y-5)^2=49$; **2)** $(x-2)^2+(y+3)^2=53$. **№ 275.** $x^2+(y-2)^2=10$. **№ 276.** $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+y^2=\frac{85}{9}$. **№ 277.** $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. **№ 278. 1)** $(x-3)^2+(y-4)^2=25$, **2)** чекиттер бир түз сызыкта жатышат. **№ 279.** *A, B* – ички; *C* – жанышуу; *D, E* – сырткы чекит. **№ 280. 1)** $(x-3)^2+y^2=11$; **2)** $x^2+(y+2)^2=16$; **3)**

$(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{22}{3}$. **№ 281.** **1)** $x^2+(y-6)^2=19$; **2)** $(x+4)^2+(y-11)^2=19$. **№ 282.** 1) $x^2+y^2=6$; 2) $x^2+y^2=6$. **№ 283.** **1)** $(8,0),(0,0);(0,-6),(0,0);$ **2)** $(3,0);(0,9),(0,1)$. **№ 284.** $x^2+(y-2)^2=4$. **№ 285.** $(x-2)^2+(y+3)^2=4$, $(x+2)^2+(y+3)^2=4$. **№ 286.** $(x-17)^2+(y-17)^2=289$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **№ 287.** $(x-6)^2+(y-7)^2=36$. **№ 288.** **1)** $(3,-1),(2,-2)$; **2)** түз сызык айлана менен $(-4,6)$ чекитинде жанышат. **№ 289.** $4x-2y-9=0$. **№ 290.** $x-2y-5=0$. **№ 291**. $2x-y\pm5=0$. **№ 292.** $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$, $\left(x-\frac{13}{18}\right)^2+\left(y-\frac{13}{18}\right)^2=\frac{25}{162}$. **№ 293.** $5x+2y-7=0$. **№ 294.** $x+y-4=0$. **№ 295.** **1)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, **2)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, **3)** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$, **4)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, **5)** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, **6)** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$, 7) $\frac{x^2}{5}+y^2=1$, **8)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, **9)** $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{1}=1$ же $\frac{x^2}{117/4}+\frac{y^2}{9}=1$, **10)** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$. **№ 296.** **1)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$, **2)** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, **3)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$, **4)** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$, **5)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$, **6)** $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$. **№ 297.1)** $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{7}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $x=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$; **2)** $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{3}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$; **3)** $a=5$, $b=1$, $c=2\sqrt{6}$, $\varepsilon=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $x=\pm\frac{25}{2\sqrt{6}}$; **4)** $a=\sqrt{15}$,

$b=\sqrt{3}$, $c=2\sqrt{3}$, $\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $x=\pm\frac{2}{3\sqrt{5}}$; **5)** $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{5}{3}$, $c=\frac{5\sqrt{5}}{6}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$; **6)** $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{5}$, $c=\frac{4}{15}$, $\varepsilon=\frac{4}{5}$, $x=\pm\frac{5}{12}$; **7)** $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$; **8)** $a=1$, $b=4$, $c=\sqrt{15}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $x=\pm\frac{16}{\sqrt{15}}$; **9)** $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{4}{15}$, $\varepsilon=\frac{4}{3}$, $x=\pm\frac{3}{20}$.

№ 298. 1) ички; **2)** ички; **3)** сырткы; **4)** сырткы; **5)** эллипсте жатат.

№ 299. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **№ 300. 1)** $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; **2)** $\frac{x^2}{15/2}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$, **3)** $\frac{(x+2)^2}{35/4}+\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{35/12}=1$, **4)** $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{5/2}=1$, **5)** $\frac{(x+2)^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$. **№ 301.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

№ 302. $\varepsilon=0{,}5$. **№ 303.** $5\frac{1}{3}$ жана $11\frac{1}{3}$. **№ 304.** 8. **№ 305.** $r_1=2{,}6$; $r_2=7{,}4$. **№ 306.** $(-5{,}3\sqrt{3})$ жана $(-5{,}-3\sqrt{3})$. **№ 307.** 16. **№ 308. 1)** $\frac{1}{2}$; **2)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **№ 309.** (-3,2), (-4, $\frac{3}{2}$). **№ 310.** $2x-y+8=0$. **№ 311.** $\sqrt{5}x+10y-25=0$. **№ 312.** $x+y\pm5=0$. **№ 313.** $x+y\pm5=0$.

№ 314. Чыгаруу: Жер F_1 фокусунда жатсын, анда $|F_1A_1|=147$, $|F_1A_2|=197$. Мындан $|A_1A_2|=2a=344$, a=172. $|F_1F_2|=2c=50$, c=25. $b^2=172^2-25^2=28959$, $\frac{x^2}{29584}+\frac{y^2}{28959}=1$. **№ 315.**

$\varepsilon \approx 0{,}0517$. **№ 316.** $\frac{b}{a} \approx 0{,}99$. **№ 317.** **1)** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$, **2)** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, **3)** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, **4)** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, **5)** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$, **6)** $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$, **7)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ **8)** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, **9)** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. **№ 318.** **1)** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{324}=-1$, **2)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$, **3)** $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$, **4)** $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$, **5)** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$. **№ 319.** **1)** $a=3,\ b=2,\ c=\sqrt{13},\ \varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $x=\pm\frac{9\sqrt{13}}{13}$, $y=\pm\frac{2}{3}x$; **2)** $a=4,\ b=1,\ c=\sqrt{17},\ \varepsilon=\frac{\sqrt{17}}{4}$, $x=\pm\frac{16\sqrt{17}}{17}$, $y=\pm\frac{1}{4}x$; **3)** $a=4,\ b=2,\ c=2\sqrt{5},\ \varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x=\pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$, $y=\pm\frac{1}{2}x$; **4)** $a=1$, $b=1,\ c=\sqrt{2},\ \varepsilon=\sqrt{2},\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=x$; **5)** $a=2,\ b=3,\ c=\sqrt{13}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{2}$, $x=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$, $y=\pm\frac{3}{2}x$; **6)** $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{20}\sqrt{41}$, $\varepsilon=4\sqrt{41}$, $x=\pm\frac{1}{20\sqrt{41}}$, $y=\pm\frac{5}{4}x$; **№ 320.** $\sqrt{2}$. **№ 321.** **1)** $\frac{x^2}{16}-y^2=1$, **2)** $x^2-y^2=16$, **3)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **№ 322.** $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$. **№ 323.** 6 жана 14. **№ 324.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$. **№ 325.** **1)** 2, **2)** $\sqrt{10}$ же $\frac{\sqrt{10}}{3}$. **№ 326.** $x-4\sqrt{5}y+10=0$, $x-10=0$. **№ 327.** $(-6,4\sqrt{3})$,

$(-6,-4\sqrt{3})$. **№ 328.** $2\frac{1}{12}$, $26\frac{1}{12}$. **№ 329.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. **№ 330.** $(\frac{25}{4},3)$, түз сызык гипербола менен жанышат. **№ 331.** $(-9,6,\pm\frac{3}{5}\sqrt{119})$. **№ 332.** **1)** $|m>4,5|$-гиперболаны кесип өтөт; **2)** $m=\pm 4,5$-гиперболаны жанып өтөт; **3)** $|m<4,5|$- гипербола менен кесилишпейт. **№ 333.** **1)** $x=\pm\frac{4}{5}\sqrt{34}, y=\pm 1,8$ (4 чекит) **2)** $x=9,6, y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}$. **Көрсөтмө:** Гиперболанын кандайдыр бир чекитинин радиус-векторлору перпендикуляр болушса, анда алар фокустардын арасындагы камалган кесинди менен тик бурчтуу үч бурчтукту түзөт жана $r_1^2+r_2^2=4c^2$ болот. **№ 334.** $5x-3y-16=0$, $13x+5y+48=0$. **№ 335** $3x-4y\pm 10=0$. **№ 336.** $10x-3y\pm 32=0$. **№ 337.** $3x+4y-5=0$. **Көрсөтмө:** X,Y-гиперболада жаткан чекиттер болуп, $A=\frac{1}{2}[XY]$ болсун. Анда

$$\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=3,\\ \frac{y_1+y_2}{2}=-1\end{cases}$$

системсасын чечүү керек. Мында $X(x_1,y_1), Y(x_2,y_2)$.

№ 338. $\mathrm{b}, \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$. **№ 339.** $\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$. **№ 340.** $(0,0),(6,\pm 2\sqrt{3})$.

№ 341. $\rho_1\rho_2=\frac{a^2b^2}{c^2}$. **Далилдөө:** $l_1: bx+ay=0$, $l_2: bx-ay=0$ - гиперболанын асимптоталарынын теңдемеси. $M_0(x_0,y_0)$-

гиперболанын каалаган чекити болсун. $\rho_1(M_0,l_1)=\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\rho_2(M_0,l_2)=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{x_0{}^2}{a^2}-\frac{y_0{}^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_0{}^2=a^2+\frac{a^2}{b^2}y_0{}^2$, $a^2+b^2=c^2$ болгондуктан $\rho_1\rho_2=\frac{b^2x_0{}^2-a^2y_0{}^2}{c^2}=$ $\frac{b^2(a^2+\frac{a^2}{b^2}y_0{}^2)-a^2y_0{}^2}{c^2}=\frac{a^2b^2}{c^2}$. **№ 342.** $x+5=0$. **№ 343.** $\arccos\frac{4}{5}$. **№ 344. 1)** $y^2=12x$; **2)** $y^2=10x-25$; **3)** $y^2=16x$; **4)** $x^2=8y$; **5)** $x^2=18y$. **№ 345.** 5. **№ 346.** $\frac{\sqrt{69}}{2}$. **№ 347. 1)** $(\frac{3}{2},0)$; $x=-\frac{3}{2}$; **2)** $(-\frac{3}{4},0)$; $x=\frac{3}{4}$; **3)** $(0,\frac{1}{4})$; $y=\frac{1}{4}$; **4)** $(0,-\frac{\sqrt{3}}{4})$, $y=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **№ 348. 1)** параболанын ичинде; **2)** параболанын сыртында; **3)** параболада. **№ 349.** $\frac{1}{5}$. **№ 350. 1)** $y^2=24x$; **2)** $y^2=9x$. **№ 351.** $x-y-2=0$.

Чыгаруу. A чекити аркылуу өткөн $y-3=k(x-5)$ түз сызыгы менен $y^2=6x$ параболасынын кесилишин табалы.

$$\begin{cases} y-3=k(x-5) \\ y^2=6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-3=k(\frac{y^2}{6}-5) \\ x=\frac{y^2}{6} \end{cases} \Rightarrow 6y-18=ky^2-30k \Rightarrow$$

$\Rightarrow ky^2-6y+(18-30k)=0$. $D=36-72k-120k^2$

$$y_1=\frac{6+2\sqrt{9-18k-30k^2}}{2k}=\frac{3+\sqrt{9-18k-30k^2}}{k}$$

$$y_2 = \frac{3-\sqrt{9-18k-30k^2}}{k},$$

$$\left.\begin{array}{r} y_1 + y_2 = 6 \\ y_1 + y_2 = \dfrac{6}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow y-3 = x-5 \Rightarrow x-y-2=0.$$ **№ 352.** $y = -\frac{9}{4}$ түз сызыгынын параболанын ичинде жаткан шооласы. **№ 353.** $\frac{8}{3}$. **№ 354.** 56м. **№ 355.** **1)** $(\frac{15}{2}, 5\sqrt{3})$ жана $(\frac{15}{2}, -5\sqrt{3})$; **2)** $(\frac{2}{5}, 2)$ жана $(\frac{2}{5}, -2)$; **3)** $(\frac{5}{4}, \frac{5}{\sqrt{2}})$ жана $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{\sqrt{2}})$; **4)** $(8, 4\sqrt{5})$ жана $(8, -4\sqrt{5})$, $(\frac{10}{3}, \frac{10}{\sqrt{3}})$ жана $(\frac{10}{3}, -\frac{10}{\sqrt{3}})$. **№ 356.** (13,11), (-1,-3). **№ 357.** $2\sqrt{15}$. **№ 358.** $y = 6$. **№ 359.** 2. **Көрсөтмө:** Парабола менен түз сызык кесилишпесе, түз сызыктан параболага чейинки аралык түз сызыктан параболанын ага параллель болгон жанымасына чейинки аралыкка барабар. Параболанын (x_0, y_0) чекитиндеги жанымасын $4x + 3y + 46 = 0$ түз сызыгына параллель болгон түз сызык болот. Мында $x_0 = 9$, $y_0 = -24$. $M(9,\text{-}24)$ чекитинен $4x + 3y + 46 = 0$ түз сызыгына чейинки аралыкты табуу керек. **№ 361.** $y^2 = \pm 2x + 1$ теңдемелери менен берилген эки парабола. **№ 362.** 1) $B^2 p > 2AC$ 2) $B^2 p < 2AC$. **Көрсөтмө:** 2 сызыктын кесилиши үчүн алардын теңдемелеринен түзүлгөн системанын чечимге ээ болушу зарыл жана жетиштүү. **№ 363.** **1)** Параллель түгөй түздөр: $y'^2 = 3$, $x = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}$, $y = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}$; **2)** Жорума эллипс:

$\frac{1}{8}x'^2+\frac{1}{2}y'^2=-1$, $2x=\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'$, $2y=\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y'$; **3)** Парабола: $y'^2=2x'$, $5x'=4x-3y$, $5y'=3x+4y$; **4)** Гипербола: $\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{4}=1$, $5x'=x-2y$, $\sqrt{5}y'=2x+y$; **5)** Жорума параллель түгөй түздөр: $x'^2+1=0$, $2x'=\sqrt{3}x-y$, $2y'=x+\sqrt{3}y$. **6)** Парабола: $y'^2=x'$, $2x'=\sqrt{3}x-y$, $2y'=x+\sqrt{3}y$. **7)** Эллипс: $x'^2+y'^2=1$, $5x'=4x-3y$, $5y'=3x+4y$; **8)** Гипербола: $\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{4}=1$, $5x'=x-2y$, $\sqrt{5}y'=2x+y$; **9)** Кесилишүүчү түгөй түздөр: $x'^2-y'^2=0$, $6x'=x+\sqrt{35}y$, $6y'=-\sqrt{35}x+y$. **№ 364. 1)** Жорума кесилишүүчү түгөй түздөр: $x'^2+y'^2=0$, $x=x'+1$, $y=y'-2$; **2)** Гипербола: $x'^2-\frac{1}{4}y'^2=-1$, $x=x'+\frac{1}{2}$, $y=y'-3$; **3)** Парабола: $x'^2-4y=0$, $x=x'+3$, $y=y'-1$; **4)** Жорума параллель түгөй түздөр: $x'^2+1=0$, $x=x'+5$, $y=y'-2$; **5)** Гипербола: $\frac{x'^2}{4}-y'^2=1$, $x=x'+2$, $y=y'-1$; **6)** Тен жактуу гипербола: $x'^2-y'^2=5$, $x=x'$, $y=y'-10$;**7)** Айлана: $x'^2+y'^2=1$, $x=x'+1$, $y=y'-3$; **8)** Парабола: $y'^2=2x'$, $x=x'-5$, $y=y'$; **9)** Жорума эллипс: $x'^2+2y'^2=-1$, $x=x'+2$, $y=y'+3$; **10)** Эллипс: $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$, $x=x'+1$, $y=y'$; **11)** Кесилишүүчү түгөй түздөр: $x'^2-2y'^2=0$, $x=x'-\sqrt{3}$, $y=y'+5$. **№ 365. 1)** Гипербола: $5x'^2-y'^2=1$, $5x'=3x+4y$, $5y'=4x-3y+5$; **2)** Эллипс:

$52x'^2+13y'^2=1$, $x=\frac{3}{\sqrt{13}}x'-\frac{2}{\sqrt{13}}y'-\frac{1}{26}$, $y=\frac{2}{\sqrt{13}}x'+\frac{3}{\sqrt{13}}y'+\frac{42}{13}$; **3)** Тең жактуу гипербола: $x'^2-y'^2=1$, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'-1$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'-2$; **4)** Парабола: $y''^2=2x''$, $5x=-4x''+3y''+18$, $5y=-3x''+4y''+1$; **5)** Кесилишүүчү түгөй түздөр: $x''^2-2=0$, $5x''=3x-4y-5$, $5y''=4x+3y$; **6)** Кесилишүүчү түгөй түздөр: $x''-y''=0$, $2x''=\sqrt{3}x-y-2$, $2y''=x+\sqrt{3}y$; **7)** Эллипс: $x''^2+2y''^2=1$, $\sqrt{5}x''=x-2y+1$, $\sqrt{5}y''=2x+y$; **8)** Парабола: $y''^2=3x''$, $\sqrt{10}x''=x+3y-3\sqrt{10}$, $\sqrt{10}y''=-3x+y$. **№ 372. 1)** $8x+25y=0$; **2)** $2x-5y=0$; **3)** $y+2=0$. **№ 373. 1)** $9x-32y-73=0$; **2)** $7x+y-20=0$; **3)** $2x-y+1=0$. **№ 376.** $\rho=\frac{4}{1-\cos\varphi}$. **№ 377.** $y^2=12x$. **№ 378 1)** $\rho=a$; **2)** $\rho=2a\cos\varphi$; **3)** $\rho^2-2\rho_1\rho\cos(\varphi-\varphi_1)=a^2-\rho_1{}^2$. **№ 379.** $\rho^2=\frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$.

Көрсөтмө: Мисалдын шартын канааттандыруучу эллипстин тик бурчтуу координаталар системасына карата теңдемеси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ болот; $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ экендигин эске алабыз.

№ 380. $\varphi=\arccos(\pm\frac{4}{5})$. **№ 381. 1)** $\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$; **2)** $\rho=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, мында $p=\frac{b^2}{a}$ – эллипстин параметри. **№ 382.** $a=2\sqrt{2}$; $b=\sqrt{6}$;

$2c = 2\sqrt{2}$. **№ 383.** $\rho^2 = -\frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$. **№ 384.** $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. **№ 385.** $\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, $p = \frac{b^2}{a}$. **№ 386.** $\rho = \frac{2}{\sin(\varphi-\frac{\pi}{4})}$, $\rho = \frac{2}{\sin(\varphi-\frac{3\pi}{4})}$ – асимптоталарынын теңдемелери; $\rho = -\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}$, $\rho = -\frac{3\sqrt{2}}{\cos\varphi}$ – директрисаларынын теңдемелери. **№ 387.** $\rho = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **№ 388.** $M(3;\arccos\frac{1}{3})$- уюлдук окко карата симметриялуу болгон 2 чекит. **№ 389.** $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$. **№ 390. 1)** $(\frac{p}{2},\pi)$ – параболанын чокусу. **2)** $(p,\frac{\pi}{2})$-жана $(p,\frac{3\pi}{2})$. **№ 391. 1)** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$, **2)** $y^2=\frac{2}{3}x$, **3)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **№ 392. 1)** $x^2+y^2+z^2=81$, **2)** $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=4$, **3)** $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36$, **4)** $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$, **5)** $x^2+y^2+z^2=9$, **6)** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$, **7)** $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$. **№ 393.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$, $x^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$. **№ 394.** $r=5$. **№ 395. 1)** $C(3,-2,5)$, $r=4$; **2)** $C(-1,3,0)$, $r=3$; **3)** $C(2,1,-1)$, $r=5$; **4)** $C(0,0,3)$, $r=3$; **5)** $C(0,-10,0)$, $r=10$. **№ 396. 1)** сферанын сыртында; **2), 5)** сферанын бетинде; **3), 4)** сферанын ичинде. **№ 397. 1)** 5, **2)** 21, **3)** 7. **№ 398. 1)** тегиздик сфераны кесип өтөт, **2)** тегиздик сфераны жанып өтөт, **3)** тегиздик сфера менен кесилишпейт. **№ 399.** $M(-2,-2,7)$, $d=3$. **№ 400.** $6x-3y-2z-49=0$. **№ 401.** $(2,-6,3)$. **№ 402.** $2x-y-z+5=0$. **№ 403.** $4x+3z-40=0$, $4x+3z+10=0$. **№ 406. 1)** эллиптикалык цилиндр; **2)** гиперболалык цилиндр; **3)** параболикалык цилиндр; **4)** конустук бет. **№ 407.** $2x^2+2y^2-z^2=0$. **№ 408.** $18y^2+50z^2+75xz+225x-450=0$.

№ 410. $(y-5x)^2-10(x^2+y^2+z^2)=0$. **№ 411.** $xy+xz+yz=0$.

№ 412. $40(x-2)^2-9y^2-9z^2=0$. **№ 413.** $(x-2{,}5z)^2+(y-1{,}5z)^2=25$.

№ 414. $(x-y)^2+3z^2-8(x-y)-8z-26=0$.

№ 415. $3\left[(x-z)^2+(y-z)^2-1\right]-x(x+y-2z)^2=0$.

№ 418. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{5}=1$. **№ 420.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{4}}+\frac{z^2}{\frac{25}{4}}=1$.

№ 421. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$. **№ 422.** $\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{21}=1$.

№ 423. $\frac{x^2}{2{,}4}+\frac{y^2}{2{,}4}+\frac{z^2}{16}=1$. **№ 424.** $\frac{x^2}{72}+\frac{y^2}{108}+\frac{z^2}{72}=1$

№ 425. $a=\frac{5\sqrt{6}}{3}$, $b=\frac{4\sqrt{6}}{3}$. **№ 426.** $O(0,2,0)$, $A_1\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},-2,0\right)$, $A_2\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2},-2,0\right)$, $B_1(0,-2,2\sqrt{2})$, $B_2(0,-2,2\sqrt{3})$.

№ 427. $M_1(2,-2,-2)$, $M_2\left(\frac{10}{9},-\frac{14}{9},-\frac{22}{9}\right)$. **№ 428.** $\sqrt{\frac{330}{3}}$.

№ 429. 1) $O(-2,3,2)$, $a=\sqrt{15}$, $b=\sqrt{30}$, $c=2\sqrt{3}$;

2) $O(-1,2,1),\ a=\sqrt{\frac{48}{8}},\ b=3,\ c=\sqrt{15};$

3) $O\left(0,1,\frac{3}{2}\right),\ a=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ c=\frac{3\sqrt{6}}{4}.$

№ 430. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=-1$ – эки көңдөйлүү айлануу гиперболоиди.

№ 431. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ – бир көңдөйлүү айлануу гиперболоиди.

№ 433. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$ – бир көңдөйлүү айлануу гиперболоиди.

№ 434. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{72}=1$ – эки көңдөйлүү айлануу гиперболоиди.

№ 435. $\frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{45}=-1$ – эки көңдөйлүү айлануу гиперболоиди.

№ 436. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{15}-\frac{z^2}{10}=1$ – бир көңдөйлүү айлануу гиперболоиди.

№ 437. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{36}=1$ – эки көңдөйлүү айлануу гиперболоиди.

№ 438. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{108}+\frac{z^2}{36}=1$ – бир көңдөйлүү айлануу гиперболоиди.

№ 439. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{12}=1$. **№ 440.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{2}=-1$. **№ 441.** Борбору $(0,0,2)$ чекитинде болгон эллипс, $a=4\sqrt{5},\ b=3\sqrt{5}$. **№ 442.** $M(-4,0,0)$ чекитинде кесилишкен эки түз сызык. **№ 443.** Жорума эллипс (тегиздик менен бет кесилишпейт). **№ 444. 1)** $M(4,2,9)$ түз сызык бетти жанып өтөт; **2)** $M_1(8,4,-3),\ M_2\left(\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\right)$. **№ 445.**

$4\sqrt{21}$. **№ 446.** **1)** $S\left(1,\frac{3}{2},3\right)$, $a=\frac{\sqrt{22}}{2}$, $b=\frac{\sqrt{11}}{2}$, $c=\frac{\sqrt{33}}{3}$ – бир көндөйлүү гиперболоид;

2) $S\left(0,\frac{3}{2},1\right)$, $a=\frac{\sqrt{13}}{6}$, $b=\frac{\sqrt{13}}{2}$, $c=\sqrt{1{,}3}$ – бир көндөйлүү гиперболоид;

3) $S\left(-1,2,\frac{3}{2},\right)$, $a=\frac{3\sqrt{6}}{4}$, $b=\sqrt{2{,}7}$, $c=\frac{3}{2}$ – эки көндөйлүү гиперболоид;

4) $S(-3,1,0)$, $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{\sqrt{7}}{7}$, $c=\frac{\sqrt{6}}{6}$ – бир көндөйлүү гиперболоид;

5) $S\left(1,5,-\frac{3}{2}\right)$, $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $b=\sqrt{1{,}2}$, $c=\frac{\sqrt{6}}{2}$ – эки көндөйлүү гиперболоид;

6) $S(-1,-3,-3)$, $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{6}$ – эки көндөйлүү гиперболоид;

№ 447. $x^2+y^2=8z$. **№ 449.** $y^2+z^2=8x$. **№ 450.** $x^2+z^2=12y$. **№ 451.** $(z-3)^2+y^2=10(x-2)$. **№ 452.** $x^2+y^2=-9z$.

№ 453. $x^2+(y-2)^2=z-1$. **№ 454.** **1)** $p=-\frac{5}{2}$, $x^2+y^2=-5z$; **2)** $p=\frac{17}{2}$, $x^2+y^2=17z$; **3)** $p=\frac{29}{2}$, $x^2+y^2=29$. **№ 455.** $a=3\sqrt{6}$, $b=2\sqrt{6}$, $O(0.0,3)$. **№ 456.** $y^2=18\left(z-\frac{1}{2}\right)$, $x=5$, $C\left(5,0,\frac{1}{2}\right)$.

№ 457. $x^2 = 16(z+6),\ y = 6,\ \ C(0,6,6)$. **№ 458.** $\dfrac{x^2}{96} - \dfrac{y^2}{32} = 1,\ ,\ \ z = 4,$ $C(0,0,4),\ A_1\left(4\sqrt{6},0,4\right),\ \ A_2\left(-4\sqrt{6},0,4\right),\ a = 4\sqrt{6},\ b = 4\sqrt{2}$.

№ 459. $9x^2 - 4y^2 = 0,\ z = 0$. **№ 460. 1)** $(2,-1,1)$; **2)** $\left(\dfrac{10}{3},-\dfrac{7}{3},\dfrac{11}{3}\right)$

№ 461. $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{x-4}{1}$ жана $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{x-2}{1}$. **№ 462.** $x = 6+3t,\ y = 2,\ z = 8+4t$ жана $x = 6+9t,\ y = 2+8t,\ z = 8+20t$.

№ 464. $\begin{cases} y-2=0, \\ 4x+3z=0 \end{cases}$ жана $\begin{cases} 4x-3z=0, \\ y+2=0. \end{cases}$.**№ 465.** $l_1 : \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$

№ 466. $\begin{cases} x-y+4=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$.**№ 468.** $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$ жана $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2}$.

Адабияттар

1. Атанясян Л.С., Атанясян В.А. Сборник задач по геометрии. Ч. I. М., «Просвещение», 1973, 256 с.
2. Атанасян Л.С. Геометрия. Ч.I. М., «Просвещение», 1973, 479с.
3. Атанасян С.Л., Глизбург В.И.. Сборник задач по геометрии. Ч. I. М. Издательство «ЭКСМО», 2007, 335с.
4. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч.I. М., «Просвещение», 1986, 276с.
5. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия, Ч.I. М., «Просвещение», 1974, 352с.
6. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С.. Сборник задач по аналитической геометрии. Издательство «Наука», М.1964, 440 с.
7. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2006
8. Дадаян А.А., Маслова Е.С.. Сборник задач по аналитической геометрии и элементам линейной алгебры. Мн. «Вышэйшая школа», 1982, 205с.
9. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. Издательство «Наука», М.1980, 240 с.
10. Матиева Г. Аналитикалык геометрия. I, II бөлүктөр. Ош, 1995, 1998
11. Матиева Г., Борбоева Г.М., Зулпукаров А.З. Экинчи тартиптеги беттердин жалпы теориясы. Ош, 2013, 146 б.
12. Микенберг М.А. Задачи по аналитической геометрии. М.2009. 73с.

13. Привалов И.И.. Аналитическая геометрия. Издательство «Лань», М.2005, 272с.

14. Самаров К.Л. Учебно-методическое пособие по разделу аналитическая геометрия. Изд. «Резольвента», 2009. 33с.

15. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Издательство «Наука», М.1970, 335 с.

Борбоева Гулниса Маматкановна

Аналитикалык геометрия боюнча мисалдар жана маселелер жыйнагы

Басууга 08.02.1016 жылы кол коюлду.
Кагаздын форматы 60x84 1/16
Көлөмү 14,5 басма табак.
Нускасы 500. Буюртма №80
«ВЕГА» ЖЧК басмаканасы.